Corrigé du Bac Blanc n° 2 – 9 décembre 2021

Exercice 1 (5 points) Polynésie Sept 2019

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à $0{,}9$; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0{,}9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0{,}1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de $0{,}4$. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

En 2022, on est 4 années après 2018, il s'agit donc de calculer T_4.

On a $T_0 = 0{,}9$, puis

$T_1 = T_0 - 0,T_0^2 = 0{,}9 - 0{,}1 \times 0{,}81 = 0{,}9 - 0{,}081 = 0{,}819$;

$T_2 = T_1 - 0{,}1 \times T_1^2 = 0{,}751924 \approx 0{,}752$;

$T_3 = T_2 - 0{,}1 \times T_2^2 \approx 0{,}695$ et enfin

$T_4 = T_3 - 0{,}1 \times T_3^2 \approx 0{,}647$.

$T_4 \approx 0{,}647$ donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.

2. On définit la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = x - 0{,}1x^2$.

Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.

(a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1].

La fonction polynôme f est dérivable sur [0 ; 1] et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - 2 \times 0{,}1x = 1 - 0{,}2x$$

Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 0{,}2x \leqslant 0{,}2 \iff 0 \geq -0{,}2x \geq -0{,}2 \iff 1 \geq 1 - 0{,}2x \geq 0{,}8$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur [0 ; 1] : la fonction f est donc croissante sur [0 ; 1] de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

On peut dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$:

x	0	1
$f(x)$	0 ↗	0,9

(b) Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

Initialisation : on a vu que $0 \leq 0{,}819 \leq 0{,}9 \leq 1$ ou $0 \leq T_1 \leq T_0 \leq 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$. par croissance de la fonction f on a : $f(0) \leq f(T_{n+1}) \leq f(T_n) \leq f(1)$ ou $0 \leq T_{n+2} \leq T_{n+1} \leq 0{,}9$.

On a donc $0 \leq T_{n+2} \leq T_{n+1} \leq 1$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

Conclusion :

L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

(c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

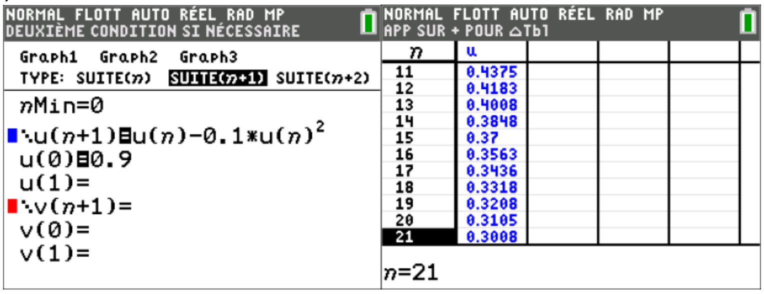
On vient de démontrer que :

- $T_{n+1} \leqslant T_n$ donc la suite (T_n) est décroissante
- $0 \leqslant T_n$ donc la suite (T_n) minorée par 0.

Ces deux points permettent de conclure que la suite (T_n) converge vers une limite $\ell \geq 0$.

(d) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à $0{,}4$ au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

A l'aide de la calculatrice, c'est au bout de 14 ans que le taux est inférieur à 0,4 ($T_{14} \approx 0{,}385$) : les spécialistes ont donc raison. $T_{20} \approx 0{,}31$



Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $P(t) = \frac{1000}{0{,}4+3{,}6e^{-0{,}5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Sur l'intervalle $[0;+\infty[$, la fonction P quotient de fonctions dérivables et de dénominateur strictement positif, est dérivable et sur cet intervalle :

$$P'(t) = -\frac{-0{,}5 \times 3{,}6e^{-0{,}5t} \times 1000}{(0{,}4+3{,}6e^{-0{,}5t})^2} = \frac{1800e^{-0{,}5t}}{(0{,}4+3{,}6e^{-0{,}5t})^2}$$

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}5t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}5t} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} 0{,}4 + 3{,}6e^{-0{,}5t} = 0{,}4$ et enfin $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1000}{0{,}4+3{,}6e^{-0{,}5t}} = \frac{1000}{0{,}4} = 2500$.

$P'(t)$ est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc $P'(t) > 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction P est donc croissante sur $[0;+\infty[$ de $P(0) = \frac{1000}{0{,}4+3{,}6} = \frac{1000}{4} = 250$ à $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 2500$.
La fonction P est strictement croissante, continue car dérivable sur $[0;+\infty[$ de 250 à 2500.

t	0	$+\infty$
$P'(t)$	$+$	
$P'(t)$	250	2500

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

La fonction P est strictement croissante, continue car dérivable sur $[0;+\infty[$ de 250 à et comme $250 < 2000 < 2500$ il existe, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire, un réél unique $t_0 \in [0;+\infty[$ tel que $P(t_0) = 2000$.
La calculatrice donne : $P(7) \approx 1965$ et $P(8) \approx 2146$, donc $7 < t_0 < 8$; puis $P(7{,}1) \approx 1987$ et $P(7{,}2) \approx 2007$, donc $7{,}1 < t_0 < 7{,}2$.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
0	250
1	387.07
2	579.92
3	831.07
4	1127.1
5	1437.8
6	1726.4
7	1965.8
8	2146.2
9	2272.8
10	2357.1

X=0

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
7.1	1986.5
7.2	2006.6
7.3	2026.1
7.4	2045
7.5	2063.3
7.6	2081
7.7	2098.2
7.8	2114.7
7.9	2130.8
8	2146.2
8.1	2161.1

X=7.1

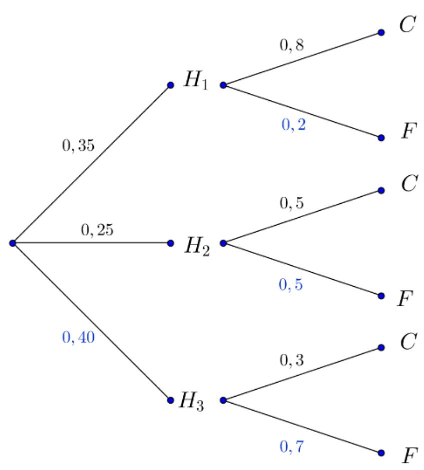
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

On a trouvé à la question précédente qu'au bout d'un temps t_0 compris entre 7,1 et 7,2 années la population aura atteint les 2000 individus, donc durant l'année 2026.

Exercice 2 (5 points) Métropole Juin 2013

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H $_1$, 25 % de l'horticulteur H $_2$ et le reste de l'horticulteur H $_3$. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H $_1$ comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H $_2$ n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H $_3$ seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :
- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H $_1$ »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H $_2$ »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H $_3$ »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu » .



a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H $_3$.

On nous demande de déterminer $P(H_3 \cap C)$.
$P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0{,}4 \times 0{,}3 = \boxed{0{,}12}$.

c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0{,}525$.

Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C) \\ &= 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}25 \times 0{,}5 + 0{,}12 \\ &= \boxed{0{,}525} \end{aligned}$$

d) L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

On demande $P_C(H_1)$.

$$P_C(H_1) = \frac{P(C \cap H_1)}{P(C)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}8}{0{,}525} = \frac{0{,}28}{0{,}525} \approx \boxed{0{,}533}$$

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.
(a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est il un conifère?), avec une probabilité de succès de $0{,}525$ qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}525$.

(b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères?
On arrondira à 10^{-3}.

On sait que pour $0 \leq k \leq 5$, $p(X = k) = \binom{10}{k}(0{,}525)^k \times (0{,}475)^{10-k}$ donc pour $k = 5$,

$p(X = 5) = \binom{10}{5}(0{,}525)^5 \times (0{,}475)^5 = \boxed{0{,}243 \quad à\ 10^{-3}\ près}$.

(c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

Pour que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus, il faut qu'il comporte au plus 8 conifères donc que « $X \leq 8$ » .

$$\begin{aligned} p(X \leq 8) &= 1 - P(X = 9) - P(X = 10) = 1 - 10(0{,}525)^9 \times (0{,}475)^1 - (0{,}525)^{10} \\ &= \boxed{0{,}987 \quad à\ 10^{-3}\ près} \end{aligned}$$

<u>Exercice 3</u> (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= 3 - t \\ z &= t \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x &= -5 + 2t' \\ y &= -1 + t' \\ z &= 5 \end{cases},\ t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

1. Vérifier que le point A(2 ; 3 ; 0) appartient à la droite d_1.

En choisissant $t = 0$, on obtient $x = 2\ ,\ y = 3\ et\ z = 0$ c'est-à-dire les coordonnées du point A.
Ceci prouve que $A \in d_1$.

2. Donner un vecteur directeur $\vec{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Vous justifierez votre réponse.

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles (en effet : $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{1}$) donc les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Ceci prouve que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B $(3\,;3\,;5)$.

(a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

$$\Delta : \begin{cases} x &= 3+k \\ y &= 3-2k \\ z &= 5-3k \end{cases}$$

(b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes? Justifier la réponse.

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ceci prouve que les droites d_1 et Δ ne sont pas parallèles : elles peuvent donc être sécantes.
Soit $M(x\,;y\,;z)$ l'éventuel point d'intersection de d_1 et Δ.
Les coordonnées de M doivent vérifier les deux systèmes de manière simultané, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2+t &= 3+k \\ 3-t &= 3-2k \\ t &= 5-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+(5-3k) &= 3+k \\ 3-(5-3k) &= 3-2k \\ t &= 5-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 &= 4k \\ 5k &= 5 \\ t &= 5-3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ t=2 \end{cases}$$

Le système admet un unique couple solution donc les droites d_1 et Δ sont sécantes.
En prenant $k=1$, par exemple, on obtient le point de coordonnées $(4\,;1\,;2)$.

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, cocher la case de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq x^2$ pour tout x positif. On a alors :

La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{e^x} = 0}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$0 \leq f(x) \leq x^2 \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{x^2}{e^x}$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2}{e^x} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{e^x} = 0$.

2. Soient f et g deux fonctions telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$. On a alors :

La courbe représentative de la fonction $\frac{f}{g}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$	La limite de la quantité $\frac{f}{g}$ en $+\infty$ est indéterminée	$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3e^x - x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$	$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	La limite de la fonction f en $+\infty$ n'existe pas

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(3 - \frac{x}{e^x}\right)$ or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 - \frac{x}{e^x}\right) = 3$
Par produit, on peut en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \frac{3n}{n+2}$. On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$	$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	La limite n'existe pas

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

5. Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$

On peut alors affirmer que :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge	$v_n \leq 2$, pour tout n	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge	La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

On peut déduire des hypothéses que