Terminale Spécialité	BAC BLANC de Mathématiques n°1 Durée : 2h	29 septembre 2021

Exercice 1 (12 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

$$a_1 = a_0 \times \frac{85}{100} + 450 = 200 \times \frac{85}{100} + 450 = 620$$

0,5 pt

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$.

Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a: $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$.

0,5 pt

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = a_n - 3000$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3000 \\ &= 0{,}85u_n + 450 - 3000 \\ &= 0{,}85(v_n + 3000) - 2550 \\ &= 0{,}85v_n + 2550 - 2550 \\ &= 0{,}85v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$$

1,5 pt

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $v_0 = -2800$

(b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

On en déduit que, pour tout n, on a

$$v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0{,}85^n$$

1 pt

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.

Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n,

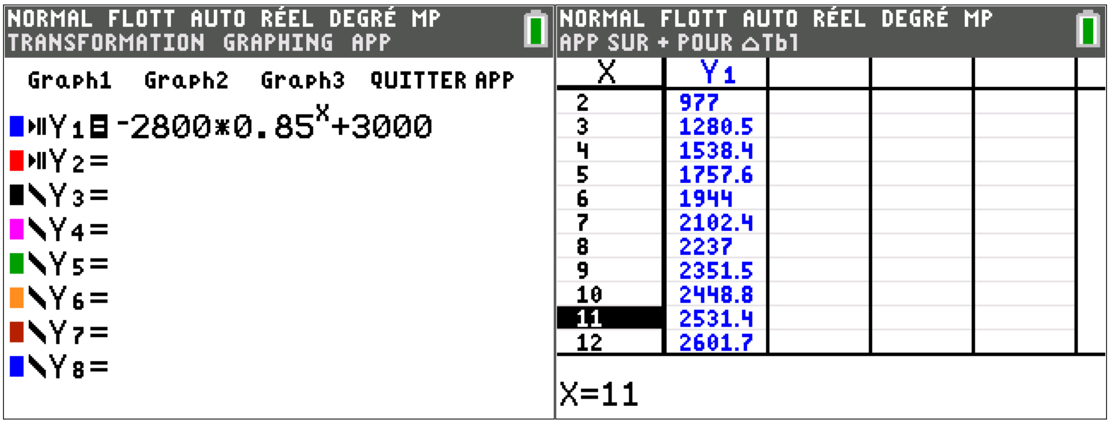
$$a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$$

0,5 pt

4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

A l'aide du tableur de la calculatrice, le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 est 11.

0,5 pt



Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

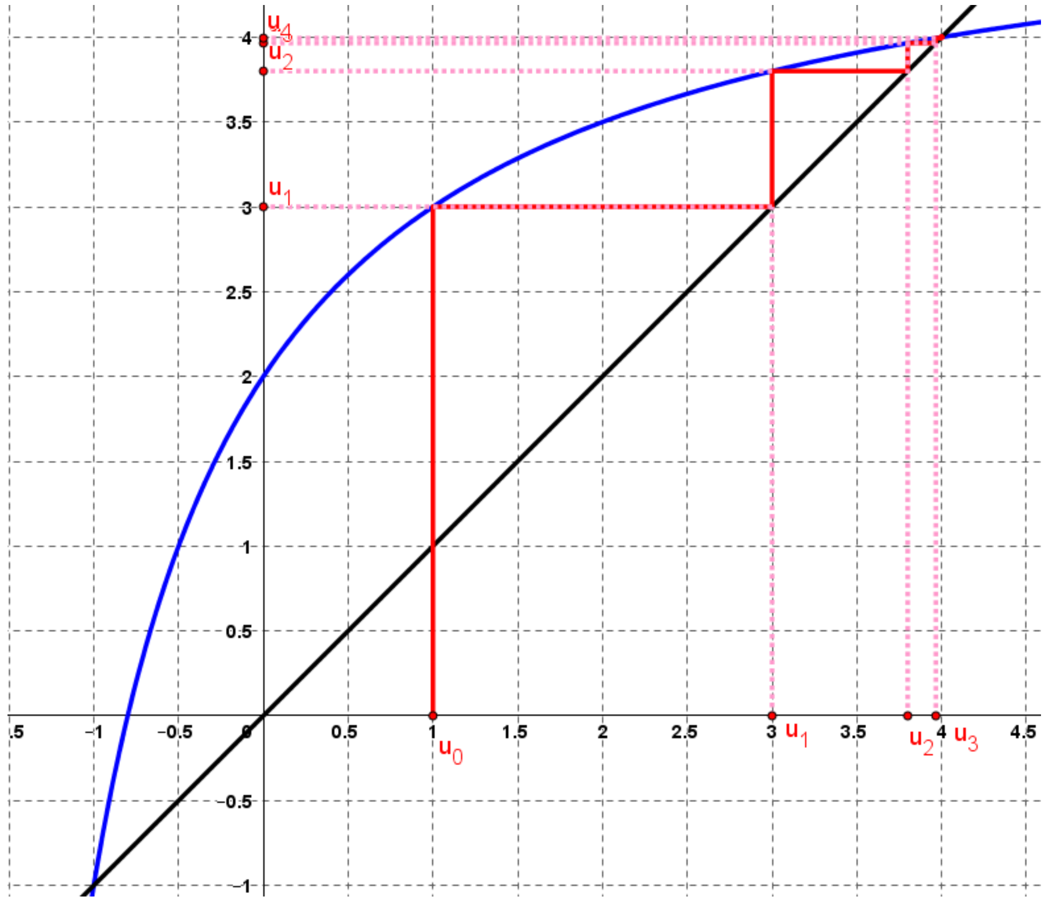
$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne **en annexe** une partie de la courbe représentative (C) de la fonction *f* ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.

1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.



1 pt

(b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

On peut conjecturer que la suite est croissante et semble converger vers 4.

0,5 pt

2. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{5\times(x+2)-(5x+4)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$f'(x) > 0$ sur $[0\,,+\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

1 pt

3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

Soit $\mathcal{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

* **Initialisation**

$$u_0 = 1 \; et \; u_1 = \frac{5\times u_0+4}{u_0+1} = \frac{5\times 1+4}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$$

$0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

* **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,4[$, donc de la relation

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.

$f(0) = \frac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \frac{24}{6} = 4$

On a donc: $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

* **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout n, on a: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

2 pt

(b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

- Pour tout n, on a; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
- Pour tout n, on a; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

1 pt

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5000 que compte l'entreprise.

1 pt

5. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil():
    n=0
    u=1
    while(4-u)>0.0001:
        u=(5*u+4)/(u+2)
        n=n+1
    return n
```

La valeur de n renvoyée par ce programme est 7.
À quoi correspond-elle ?

Dès que $n \geq 7$, $4 - u \leq 0{,}0001$ ou encore, $u \geq 3{,}9999$.

1 pt

Exercice 2 (8 points)

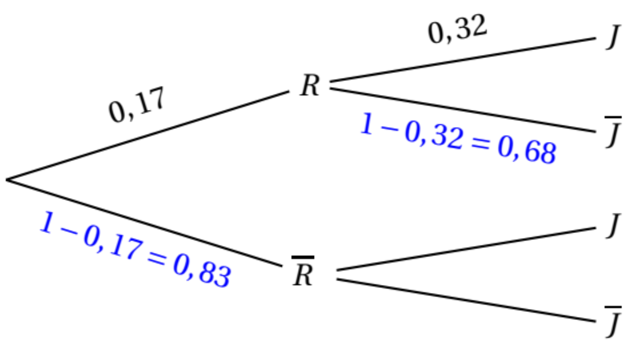
Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de l'arbre pondéré, donné **en annexe**, en y reportant les données de l'énoncé.



1 pt

2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

$$P(R \cap J) = 0{,}17 \times 0{,}32 = 0{,}0544$$

0,5 pt

3. D’après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n’utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n’utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P\left(\overline{R} \cap J\right)$.

D’après la formule des probabilités totales:

$$P(J) = P(R \cap J) + P\left(\overline{R} \cap J\right) \text{ donc } P\left(\overline{R} \cap J\right) = P(J) - P(R \cap J) = 0{,}11 - 0{,}0544 = 0{,}0556$$

soit $0{,}056$ à 10^{-3} près.

1,5 pt

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

$$P_{\overline{R}}(J) = \frac{P\left(\overline{R} \cap J\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0{,}056}{0{,}83} \approx 0{,}0675$$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d’environ $6{,}75$ %.

1 pt

Partie B :

Lors d’un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

- On interroge une personne au hasard et il n’y a que deux possibilités: elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0{,}17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0{,}83$.
- On réalise $n = 50$ fois ce questionnement de façon identique.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}17$.

1,5 pt

2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.

$$P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0{,}17^5 \times (1 - 0{,}17)^{50-5} \approx 0{,}069$$

Il y a donc une probabilité de $0{,}069$ que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

1 pt

3. Le recenseur indique qu’il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d’entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

Le recenseur indique qu’il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d’entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X < 13) \geqslant 0{,}95$.

1 pt

Or $P(X < 13) = P(X \leqslant 12) \approx 0{,}929 < 0{,}95$ donc cette affirmation est fausse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

0,5 pt

Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X) = np = 50 \times 0{,}17 = 8{,}5$.