Première C	Évaluation de mathématiques n°2 Probabilités (1h45 mn)	Mardi 9 octobre 2020

Corrigé

Exercice 1 (Niveau 1)

1,5 points

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation suivante : $2x^2 = 1 - 3x$

$$2x^2 = 1 - 3x \iff 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 + 8 = 17$$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2 \times 2} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \quad et \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$$

Exercice 2 (Niveau 1)

1,5 points

Soit A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,5$ et $P(B) = 0,3$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.

Par indépendance de A et B, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$.

2. À l'aide de la formule du crible, en déduire $P(A \cup B)$.

On sait que $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,3 - 0,15 = 0,65$$

Exercice 3 (Niveau 1)

5 points

Pour chaque question, choisir la ou les bonne(s) réponses sans chercher à justifier.

Il sera attribué 1 pt par réponse juste et $-0,5$ par mauvaise réponse et 0 sinon.

Soit A et B deux évènements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $P(A) = 0,15$ et $P(B) = 0,6$.

1. Si de plus, $P_B(A) = \frac{1}{4}$, alors on peut affirmer que :

a) A et B sont indépendants	***b)*** $P(A \cap B) = 0,15$	***c)*** $P_A(B) = 1$	***d)*** $P(A \cap B) = 0,9$

<u>Réponses justes :</u> ***b)*** et ***c)*** .

En effet, si de plus on a $P_B(A) = \frac{1}{4}$, on a $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ donc $P(A \cap B) = 0,6 \times \frac{1}{4} = 0,15$ et alors $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,15} = 1$.

En revanche, ***a)*** et ***d)*** sont fausses car $P_A(B) \neq P(A)$ donc A et B ne sont pas indépendants, et $P(A \cap B) = 0,15 \neq 0,9$.

2. Si de plus, $P(A \cup B) = 1$, alors on peut affirmer que :

a) A et B sont indépendants	***b)*** $\{A, B\}$ est une partition de l'univers	***c)*** $P(A) + P(B) = 1$	***d)*** Cette situation est impossible

<u>Réponse juste :</u> ***d)***

En effet, d'après la formule du crible, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc comme $P(A \cap B) \geq 0$ on a $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ donc $P(A \cup B) \leq 0,75 < 1$

Cela exclut les autres réponses proposées.

3. Si de plus, A et B sont indépendants, alors on peut affirmer que :

a) $P_A(B) = \frac{3}{5}$	***b)*** $P(A \cap B) = 0$	***c)*** $P(A \cap B) = \frac{3}{4}$	***d)*** $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{50}$

Réponses justes : ***a)*** et ***d)*** .
En effet, si de plus A et B sont indépendants, alors on sait que $P_A(B) = P(B)$ et on a $0{,}6 = \frac{3}{5}$.
Par ailleurs, A et B étant indépendants, on sait que A et $\bar{B}$ le sont aussi, donc

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = 0{,}15 \times (1 - 0{,}6) = 0{,}06 = \frac{3}{50}$$

En revanche, ***b)*** et ***c)*** sont fausses : comme $P(A \cap B) \leq P(A)$ et $P(A) = 0{,}15$, il est impossible que $P(A \cap B) = \frac{3}{4}$ vu que A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(B) \times P(A) = 0{,}15 \times 0{,}6 = 0{,}09 \neq 0$.

Exercice 4 (Niveau 1)

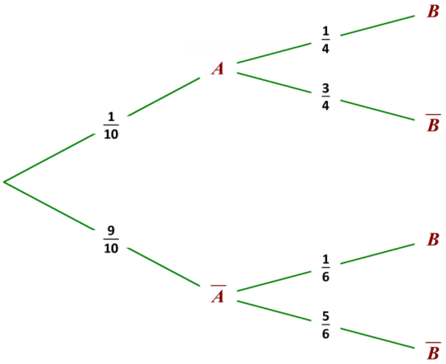
3 points

On considère un jeu dans lequel on lance d'abord un dé à 10 faces puis :

- si le résultat est 10, on lance un dé à 4 faces ;
- sinon on lance un dé à 6 faces.

On gagne lorsque le résultat du deuxième dé est 1.
On considère les événements A : « Le résultat du premier dé est 10 » et B : « le joueur gagne ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.



2. Déterminer $p(A \cap B)$.

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

3. Déterminer la probabilité de gagner.

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \bar{A}\right) = \frac{1}{40} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{40} + \frac{9}{60} = \frac{7}{40} = 0{,}175$$

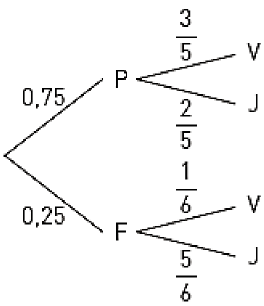
Exercice 5 (Niveau 2)

2 points

On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est 0,75.
Si le résultat est Pile, on tire une boule dans une urne contenant 3 boules vertes et 2 boules jaunes ; si le résultat est Face, on tire une boule dans une urne contenant 1 boule verte et 5 boules jaunes.
Représenter la situation associée à cette expérience aléatoire par un arbre pondéré après avoir énoncé les événements y apparaissant.

Lorsque l'on réalise cette expérience aléatoire, on appelle :

- P l'événement « la pièce tombe sur Pile » ;
- F l'événement « la pièce tombe sur Face » ;
- V l'événement « la boule est verte » ;
- J l'événement « la boule est jaune ».



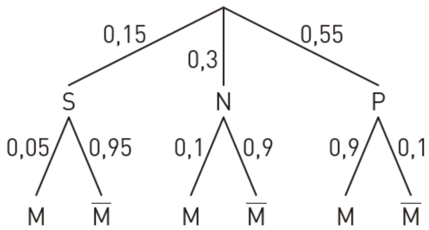
Exercice 6 (Niveau 2-3)

5 points

Saumonix est poissonnier et 15 % du poisson qu'il vend a été pêché par ses soins, 30 % vient d'un grossiste normand et le reste d'un grossiste de Paris.
Il a remarqué que 5 % de ses clients sont mécontents du poisson qu'il a lui-même pêché, 10 % du poisson provenant du grossiste normand et 90 % du poisson de Paris.
Un client achète un poisson à Saumonix.
On considère les événements suivants :

- S : « Le poisson a été pêché par Saumonix. »
- N : « Le poisson provient du grossiste normand. »
- P : « Le poisson provient du grossiste de Paris. »
- M : « Le client est mécontent du poisson. »

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. a) Calculer $p(P \cap M))$ et $p(M)$.

$$p(P \cap M) = p(P) \times p_P(M) = 0{,}55 \times 0{,}9 = 0{,}495$$

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(M) = p(M \cap S) + p(M \cap N) + p(M \cap P) = 0{,}15 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}495 = 0{,}5325$$

b) Les événements S et M sont-ils indépendants ?

$p(M) = 0{,}5325$ et $p_S(M) = 0{,}05$ donc $p(M) \neq p_S(M)$:
Les évènements M et S ne sont donc pas indépendants.

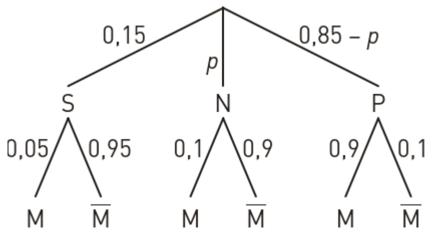
c) Un client est mécontent du poisson acheté.

Quelle est la probabilité que ce poisson ait été pêché par Saumonix ?

$$p_M(S) = \frac{p(M \cap S)}{p(M)} = \frac{0{,}15 \times 0{,}05}{0{,}5325} \approx 0{,}014$$

3. Saumonix souhaite ramener le taux de mécontentement à 30 % en continuant à pêcher 15 % de sa production. Déterminer les proportions de poisson qu'il doit commander à chaque grossiste pour atteindre son objectif.

Soit p la proportion de poisson provenant du grossiste normand.
On a alors :



puis $p(M) = 0{,}15 \times 0{,}05 + p \times 0{,}1 + (0{,}85 - p) \times 0{,}9 = 0{,}7725 - 0{,}8p$

Il s'agit de résoudre $0{,}7725 - 0{,}8p = 0{,}3 \iff -0{,}8p = -0{,}4725 \iff p = \frac{-0{,}4725}{-0{,}8} = 0{,}590625$

Il doit donc commander environ 59 % de son poisson chez le grossiste normand et environ 26 % chez celui de Paris.

Exercice 7 (Niveau 3)

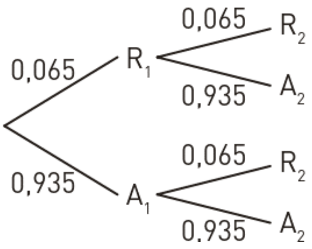
2+1 point

Dans une tombola organisée dans une école, les professeurs ont acheté 52 tickets et les parents d'élèves 748.
Comme il y a deux lots à gagner, il a été décidé d'effectuer un tirage avec remise pour leur attribution (on tire un ticket au hasard pour le premier lot puis on le remet avec les autres et on tire de nouveau un ticket au hasard).

1. Expliquer pourquoi on peut considérer que ces deux tirages au sort sont une succession de deux épreuves indépendantes.

Les tirages sont avec remise, donc on peut considérer que c'est une succession de deux épreuves indépendantes.

2. Représenter la situation par un arbre ou un tableau.



On considère les événements :

- R_1: « un professeur gagne le premier lot » ;
- A_1: « un parent gagne le premier lot » ;
- R_2 : « un professeur gagne le deuxième lot » ;
- A_2 : « un parent gagne le deuxième lot ».

3. Quelle est la probabilité que les deux lots soient gagnés par des parents ?
Que les deux lots soient gagnés par des professeurs ?
Qu'un des deux lots soit gagné par un parent et l'autre par un professeur ?

- La probabilité que les deux lots soient gagnés par des parents est :

$$p(A_1 \cap A_2) = 0{,}935 \times 0{,}935 = 0{,}874225$$

- La probabilité que les deux lots soient gagnés par des professeurs est :

$$p(R_1 \cap R_2) = 0{,}065 \times 0{,}065 = 0{,}004225$$

- La probabilité qu'un des deux lots soit gagné par un parent et l'autre par un professeur est :

$$p(R_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap R_2) = 2 \times 0{,}065 \times 0{,}935 = 0{,}12155$$