Dérivation
Fiche d'exercices (Sésamath page 128)

• Taux de variation

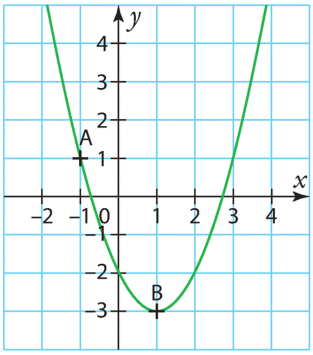
Pour les exercices 25 à 28, déterminer le taux de variation de la fonction *f* entre *a* et *b*.

25 $f : x \mapsto -5x + 8$; $a = 4$ et $b = 7$

27 $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$; $a = 1$ et $b = 3$

28 $f : x \mapsto x^2 + 1$; $a = 2$ et $b = 2 + \sqrt{3}$

29 La courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ passe par les points A et B. Quel est le taux de variation de f entre -1 et 1 ?



32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 8x - 2$ et h un nombre réel non nul.

1. Calculer $f(-2)$.

2. Exprimer $f(-2 + h)$ en fonction de h.

3. Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre -2 et $-2 + h$ et simplifier l'expression au maximum.

59 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x} - 1$ et a un nombre strictement positif.

1. Sachant que le taux de variation de f entre 0 et a est égal à $\dfrac{2}{3}$, déterminer a.

2. Tracer sur un même graphique la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite D de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$ passant par le point $A(0\,;-1)$.

• Nombre dérivé et définition

33 Soit h un nombre réel non nul. Le taux de variation entre 4 et $4 + h$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est $2 + h$. f est-elle dérivable en 4 ? Si oui, quel est son nombre dérivé en 4 ?

34 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul.
On sait que $\dfrac{f(-7+h) - f(-7)}{h} = \dfrac{5}{3}(4h + 9)$.

Peut-on dire que la fonction f est dérivable en -7 ? Si oui, déterminer $f'(-7)$.

36 Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et x un nombre réel proche de 3 mais différent de 3. On sait que $\dfrac{g(x) - g(3)}{x - 3} = 2x + 3$.

Peut-on dire que la fonction g est dérivable en 3 ? Si oui, déterminer $g'(3)$.

38 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 1$ et h un nombre réel non nul.

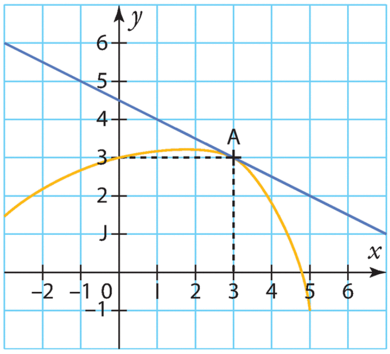
1. Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$.

2. En déduire que la fonction est dérivable en 3 et déterminer $f'(3)$.

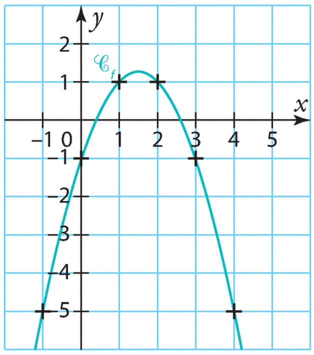
3. De la même manière, montrer que f est dérivable en 2 et déterminer $f'(-2)$.

• Nombre dérivé et tangente

42 La courbe d'une fonction g définie sur $[-3\,;5]$ est représentée ci-contre. La tangente à cette courbe au point A d'abscisse 3 passe par le point de coordonnées $(-3\,;6)$. Que vaut $g(3)$? Que vaut $g'(3)$?



43 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(2) = -1$ et $f'(0) = 2$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-contre. Reproduire la courbe $\mathscr{C}_f$ (en plaçant quelques points importants et en respectant l'allure) et tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



61 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^2 - 5$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;I,J)$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que la fonction est dérivable en -1 et déterminer $f'(-1)$.

2. Tracer sur un même graphique la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente au point d'abscisse -1.

• Équation réduite et tangente

44 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x^2 - 5x + 4)^{10}$. On admet que g est dérivable en 1, et que $g'(1) = -10$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1.

• Fonctions dérivées

45 Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

$f : x \mapsto x^4$ $\quad$ $g : x \mapsto x^{12}$ $\quad$ $h : x \mapsto x^{-1}$

$i : x \mapsto x^{-3}$ $\quad$ $j : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ $k : x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$

46 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'une somme de deux fonctions $u + v$. Dans chaque cas, identifier les fonctions u et v, et donner leurs ensembles de dérivabilité. En déduire sur quel ensemble la fonction « somme » est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + x$ $\qquad g : x \mapsto -5 + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad h : x \mapsto x^4 + x^2$

47 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'un produit d'une fonction u par un réel k. Dans chaque cas, donner le réel k et la fonction u. En déduire sur quel ensemble la fonction ku est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

$f : x \mapsto -x$ $\qquad g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2$ $\qquad h : x \mapsto \dfrac{2}{7}x$

$i : x \mapsto 4x^{-1}$ $\qquad j : x \mapsto 7x^3$ $\qquad k : x \mapsto -\dfrac{5}{8}\sqrt{x}$

48 Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

$f : x \mapsto -2x^2 + 3x - 5$ $\qquad g : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{7}{9}x^3$

49 Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'un produit de deux fonctions $u \times v$. Dans chaque cas, identifier les fonctions u et v, et donner leurs ensembles de dérivabilité. En déduire sur quel ensemble la fonction « produit » est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}(9 - 6x)$ $\qquad g : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ $\qquad j : x \mapsto (x^5 + x^3)(x^2 - 4)$

50 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-4\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x + 8}$.

1. f est de la forme $\dfrac{1}{v}$.

Donner l'expression de la fonction v et résoudre l'équation $v(x) = 0$ sur I.

2. En utilisant le théorème de la dérivée de l'inverse d'une fonction, démontrer que la fonction f est dérivable sur I et donner l'expression de sa dérivée f'.

51 Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-1\ ;\ +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1 - 2x}{3x + 3}$.

1. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$.

Donner l'expression des fonctions u et v et résoudre l'équation $v(x) = 0$ sur I.

2. En utilisant le théorème de la dérivée d'un quotient, démontrer que la fonction f est dérivable sur I et déterminer l'expression de $u'(x)$ et celle de $v'(x)$.

3. En déduire l'expression de la dérivée f'.

52 Soit h la fonction définie sur $\mathrm{I} =]-\infty\ ;\ 4[$ par $h : x \mapsto \sqrt{-3x + 12}$.

1. h est une fonction composée de deux fonctions g et f dans cet ordre.

Donner l'expression des fonctions g et f.

2. En utilisant le théorème de la dérivée d'une fonction composée, démontrer que la fonction h est dérivable sur I.

3. Déterminer l'expression de $f'(X)$ pour tout réel strictement positif X et celle de $g'(x)$ pour tout réel x de I.

4. En déduire l'expression de la dérivée h'.

53 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer sa forme générale (somme $u + v$, produit uv, inverse $\dfrac{1}{v}$, quotient $\dfrac{u}{v}$), puis en déduire sur quel ensemble elle est dérivable et sa fonction dérivée f'.

$f : x \mapsto x^5 - 3x$

$g : x \mapsto (8 - 9x)\sqrt{x}$

$h : x \mapsto \dfrac{3x - 11}{x + 1}$

$i : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 7}$

72 Soit $f : x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$. Soit h un nombre réel non nul.

1. Si h est strictement positif, montrer que le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est égal à 1.

2. Si h est strictement négatif, montrer que le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est égal à -1. (Rappel : si x est un nombre négatif alors $|x| = -x$).

3. La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

• Équations de tangentes

Pour les exercices 79 à 82, déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a, puis tracer $\mathscr{C}$ et T.

79 $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^2$ et T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = -2$.

80 $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -\dfrac{x^3}{8}$ et T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 2$.

84 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à $\mathscr{C}$ en un point A d'abscisse a.

1. Déterminer la valeur possible de a en traçant la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ sur l'écran d'une calculatrice.

2. Retrouver ce résultat par le calcul.

85 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes de coefficient directeur -1 en deux points distincts A et B dont on déterminera les coordonnées.