Second degré – Fiche d'exercices

➢ Fonctions polynômes du second degré

22 Développer et réduire chaque expression.
Préciser celles qui sont du second degré.

a) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$ **b)** $x^2-(x+1)^2$

c) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x-1\right)$ **d)** $\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)$

23 Le professeur de mathématiques de Maya lui demande de retrouver les polynômes du second degré parmi les fonctions définies ci-dessous.

$f_1(x)=-4x+2+x^2$

$f_2(x)=3x^2+7+(3x-4)^2$

$f_3(x)=(1-5x)^2-25x^2$

Maya répond : « Les trois fonctions sont des polynômes du second degré. »
A-t-elle raison ?

24 Recopier et relier chaque forme factorisée à sa forme développée.

Forme factorisée	**Forme développée**
$(2x+3)(x+1)$	$2x^2+7x+3$
$(x+3)(2x+1)$	$-2x^2+5x-3$
$(2x-1)(3-x)$	$2x^2+5x+3$
$(3-2x)(x-1)$	$-2x^2+7x-3$

25 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-7)(2x+4)$$

a) Écrire la forme développée de $f(x)$.
b) Wesley affirme : « La somme des racines de f est 5 et leur produit est -14. »
Procéder de deux façons différentes pour savoir si Wesley a raison.

26 f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-9x+20$$

a) Recopier et compléter pour tout nombre réel x :

$$f(x)=(x-5)(x-\ldots)$$

b) Résoudre alors l'équation $f(x)=0$.

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x(x+1)-x(x-4)$$

a) Factoriser $f(x)$.
b) Développer $f(x)$.
c) Utiliser la forme qui convient le mieux pour résoudre l'équation $f(x)=0$.

28 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=3(x+5)(x-7)$$

Recopier et compléter ce tableau de signes.

x	$-\infty$	$\ldots$	$\ldots$	$+\infty$
$x+5$		0		
$x-7$			0	
$f(x)$		0	0	

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

30 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t)=\frac{1}{2}(4t-1)(3t-2)$$

Dresser le tableau de signes de $g(t)$.

➢ Forme canonique et équation du second degré

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=4x^2+8x-5$$

Recopier et compléter pour obtenir la forme canonique de f :

$$f(x)=4\left(x^2+\ldots x-\frac{\ldots}{\ldots}\right)$$

$$f(x)=4\left[(x+\ldots)^2-\ldots^2-\frac{5}{4}\right]$$

$$f(x)=4\left[(x+\ldots)^2-\frac{\ldots}{\ldots}\right]$$

37 Dans chaque cas, déterminer la forme canonique de la fonction définie en utilisant la complétion du carré.

a) $f(x)=2x^2-2x+3$ **b)** $g(x)=3x^2+6x+12$
c) $h(t)=-5t^2-20t+20$

38 Recopier et relier chaque fonction polynôme du second degré à sa forme canonique.

Fonction	**Forme canonique**
$-2x^2-4x+3$	$-2(x+1)^2$
$-2x^2-8x-5$	$-2(x+2)^2+3$
$-2x^2-4x-2$	$-2(x+1)^2+5$

39 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $2x^2-5x-3=0$ **b)** $3x^2-2x+\frac{1}{3}=0$

c) $x^2+2x=35$ **d)** $t^2+t+9=0$

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $-3x^2+x+4=0$ **b)** $4x-4x^2+15=0$

c) $7u^2+5u+1=0$ **d)** $0{,}5x^2+2{,}5x-7=0$

41 Nassim a résolu l'équation $-2x^2+6x-2=0$.
Il a obtenu les solutions :
$$x_1=\frac{-6-2\sqrt{5}}{-4} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-6+2\sqrt{5}}{-4}.$$
Jessica n'est pas d'accord, car elle a obtenu :
$$x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$
Que peut-on en penser ?

42 **a)** Développer $(2+\sqrt{3})^2$.
b) Résoudre l'équation suivante :
$$x^2-(2-\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$$
Les solutions seront données sous forme simplifiée.

45 On étudie une population de bactéries en fonction du temps t, en minute (avec $t \geqslant 0$).
Le nombre de bactéries est donné par :
$$N(t)=-\frac{4}{3}t^2+40t+132$$
a) Vérifier que $N(t)=-\frac{4}{3}[(t-15)^2-324]$ et en déduire le nombre maximum de bactéries durant l'observation.
b) Résoudre l'équation $N(t)=0$. En déduire l'instant auquel toutes les bactéries auront disparues.

49 **a)** Résoudre l'équation $-x^2-4x+5=0$.
b) En déduire une factorisation de $-x^2-4x+5$.

50 Donner, si possible, la forme factorisée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x)=x^2-x+1$ **b)** $g(x)=-x^2-4x-4$
c) $h(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$ **d)** $k(x)=7x-x^2-6$

52 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x)=3x^2+x-2$$
a) Vérifier que -1 est une racine de g.
b) Sans calcul supplémentaire, déterminer le produit des racines de g.
c) En déduire la seconde racine de g.

53 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=3x^2-13x-10$$
a) Vérifier que 5 est une racine de f.
b) Sans calcul supplémentaire, déterminer la somme des deux racines de f.
c) En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

56 Armelle affirme :
« L'équation $7x^2-100x+7=0$ admet deux solutions positives et inverses l'une de l'autre. » A-t-elle raison ?

➢ Signe de ax^2+bx+c

61 Résoudre chaque inéquation.
a) $(x-3)(x+1)>0$ **b)** $t^2-7t+12>0$
c) $-x^2+7x-6 \geqslant 0$ **d)** $-3u^2+5u-3 \leqslant 0$

62 Résoudre chaque inéquation.
a) $-2a^2+13a>15$ **b)** $x^2+2{,}1x \leqslant 3{,}52$
c) $10x^2+0{,}1>-2x$ **d)** $t^2+\frac{13}{16} \leqslant \frac{1}{2}t$

63 Résoudre chaque inéquation.
a) $2x^2-3x-2 \geqslant 0$ **b)** $5x^2-6x<0$
c) $-3x^2+30x-75>0$ **d)** $-x^2+6x-9 \leqslant 0$

69 Une entreprise fabrique x dizaines d'objets par jour. Son bénéfice, exprimé en centaines d'euros, est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par $B(x)=-2x^2+12x-10$.
a) Dresser le tableau de signes de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;10]$.
b) En déduire les solutions de l'inéquation $B(x)>0$ sur l'intervalle $[0\,;10]$.
c) Quelles quantités d'objets l'entreprise doit-elle produire et vendre pour réaliser un bénéfice ?

➢ Pour aller plus loin…

88 f est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont -4 et 5.
De plus, on sait que $f(3)=8$.
Déterminer la forme développée de $f(x)$.

90 Des biologistes étudient l'impact d'un bactéricide sur une culture de bactéries.
Ils estiment que le nombre de bactéries présentes dans la culture en fonction du temps t, en min, est donné par :
$$N(t)=-5t^2+50t+1000$$
Quel est le nombre maximum de bactéries observables ?

94 Pour résoudre une équation bicarrée, c'est-à-dire de la forme $ax^4+bx^2+c=0$ (avec $a \neq 0$), on résout le système $\begin{cases} X=x^2 \\ aX^2+bX+c=0 \end{cases}$.
Résoudre chaque équation.
a) $x^4-3x^2=0$ **b)** $-\frac{1}{6}x^4+3x^2-13{,}5=0$
c) $3x^4+9x^2-12=0$ **d)** $2x^4+40x^2+128=0$

101 L'aire d'un triangle rectangle est 429 m^2 et son hypoténuse a pour longueur $h=72{,}5$.
Déterminer le périmètre de ce triangle.