Sens de variations et convergence d’une suite numérique

I. Sens de variation d'une suite

Définition - Sens de variation d'une suite

Soit (un) une suite et k un entier.

- La suite (u_n) est croissante à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite (u_n) est monotone à partir du rang k si elle est soit croissante à partir du rang k, soit décroissante à partir du rang k.
- La suite (u_n) est constante à partir du rang k si, pour tout entier $n \geq k$, $u_{n+1} = u_n$

Remarques

- Comme pour les fonctions, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement croissante, strictement décroissante, ou strictement monotone.
- Il existe des suites qui ne sont pas monotones, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$

Propriété - Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

Soit (u_n) une suite.

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite est strictement décroissante.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n^2 + 1$

Or $n^2 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Propriété - Comparaison entre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

Soit (u_n) une suite dont tous les termes sont strictement positifs.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors $u_{n+1} > u_n$, donc la suite est strictement croissante.
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors $u_{n+1} < u_n$, donc la suite est strictement décroissante.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5 \times 3^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = \frac{5 \times 3 \times 3^n}{5 \times 3^n} = 3$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Propriété - Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite est constante.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$

- Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors $u_{n+1} - u_n = 0$, donc la suite est constante.

Propriété - Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- Si $q > 1$:
  - si $u_0 > 0$, alors la suite est strictement croissante.
  - si $u_0 < 0$ la suite est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$:
  - si $u_0 > 0$, alors la suite est strictement décroissante.
  - si $u_0 < 0$ la suite est strictement croissante.
- Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $q < 0$, alors la suite n'est pas monotone.

Démonstration (livre page 54)

Exercice résolu 8 page 63 - Étudier les variations d'une suite

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$a)\ u_n = n^2 + n \qquad b)\ u_n = \frac{2^n}{5^{n+1}} \qquad c)\ u_n = -3^n$$

Solution

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n)$

$$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n$$

$$= 2n + 2 = 2(n+1)$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est strictement croissante.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{2^n}{5^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{2^n} = \frac{2\times 2^n}{5\times 5^{n+1}} \times \frac{5^{n+1}}{2^n} = \frac{2}{5}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -3^{n+1} - (-3^n) = -3^{n+1} + 3^n = -3 \times 3^n + 3^n = (-3+1) \times 3^n$

$= -2 \times 3^n$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite est strictement décroissante.

Exercices du livre Sésamath

Page 63

17 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (n+1)^2$.

1. Exprimer la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

18 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{3^{n+2}}{7^n}$.

1. Exprimer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ en fonction de n.

2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Page 67

77 En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, étudier les variations des suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = n^2 + 2n$

b) $u_n = \dfrac{4}{n+1}$

c) $u_n = -5^n$

79 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

1. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2n}{n+1} > 1$

3. En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercices du livre Sésamath

Page 67

77 En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, étudier les variations des suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = n^2 + 2n$

b) $u_n = \dfrac{4}{n+1}$

c) $u_n = -5^n$

79 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

1. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2n}{n+1} > 1$

3. En déduire les variations de la suite (u_n).

81 Étudier les variations des suites ci-dessous.

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -3$.

b) (v_n) est définie par $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 5$.

82 Déterminer le sens de variation des suites suivantes.

a) (u_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

b) (v_n) est définie par $v_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5 \times v_n$.

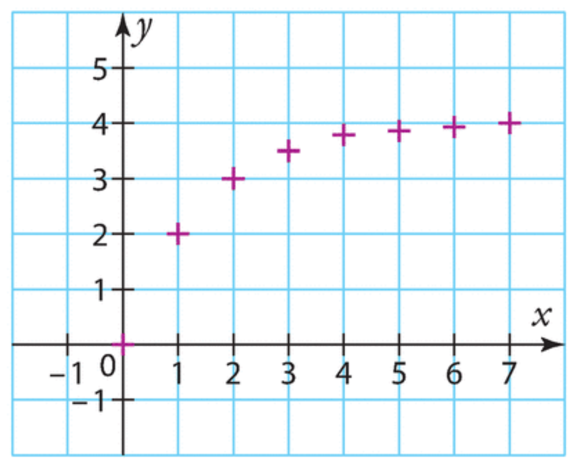
II. Notion de limite d’une suite

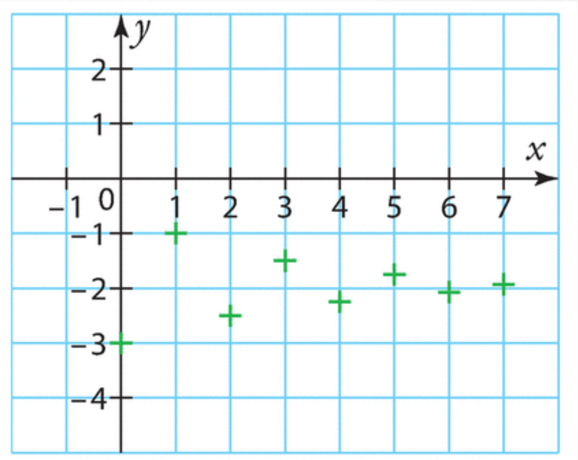
Définition – Suite ayant pour limite un nombre réel

Une suite (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n de viennent tous aussi proches de l que l’on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit que (u_n) converge vers l et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Exemples





① On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4, donc on peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

② On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de -2, donc on peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

Définition – Suite ayant pour limite $+\infty$

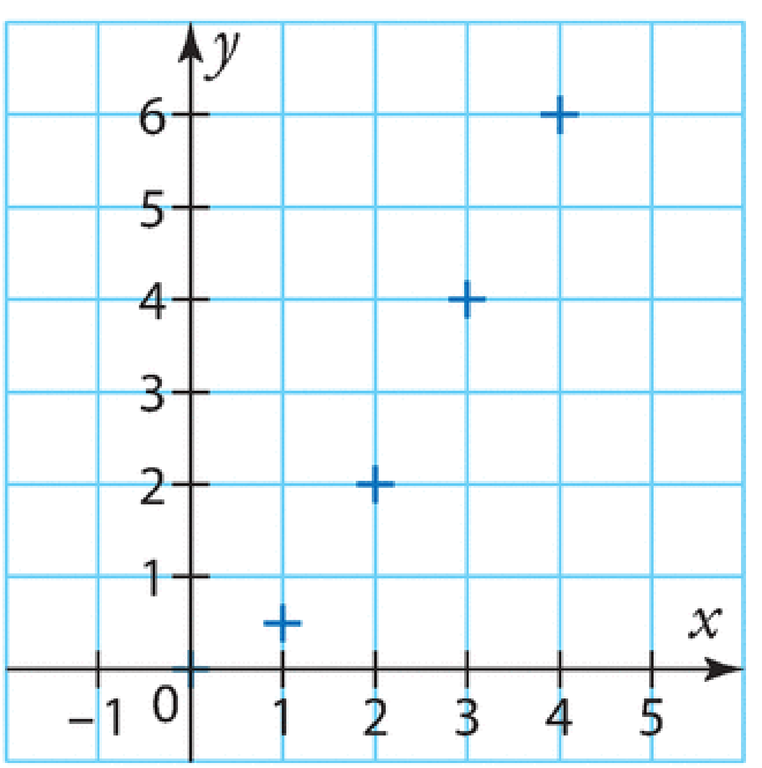
Une suite (u_n) a pour limite quand n tend vers si les termes u_n deviennent tous aussi grands que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit que (u_n) diverge et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemple

On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus grands.

Donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$



Définition – Suite ayant pour limite $-\infty$

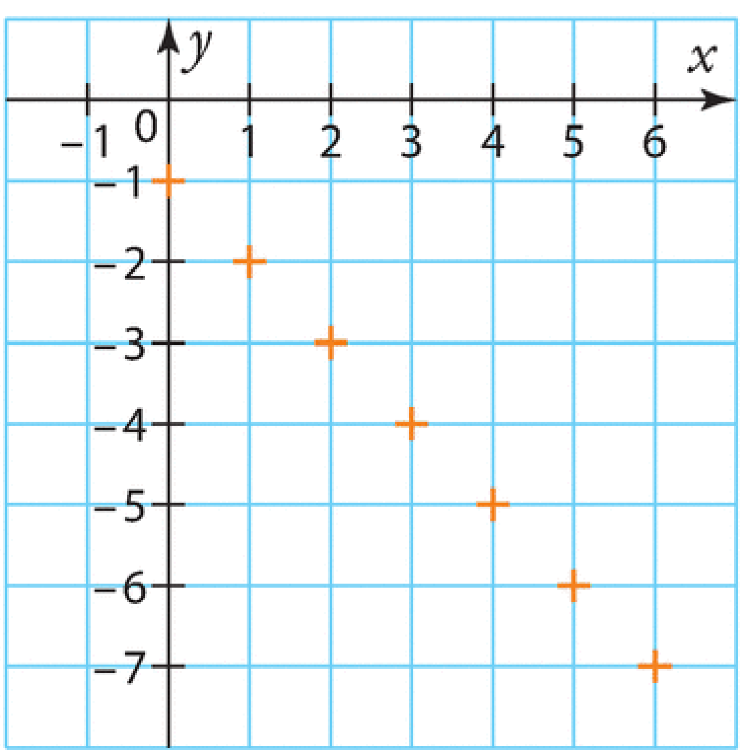
Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi grand « négativement » que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit que (u_n) diverge et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Exemple

On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus petits.

Donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.



Remarque

Certaines suites n'ont pas de limite.

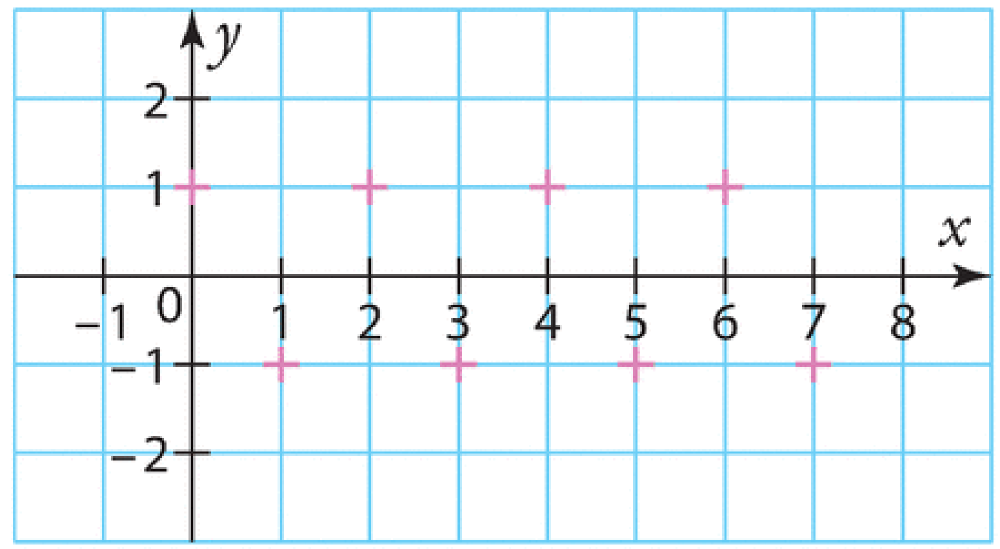
Dans ce cas, on dit que la suite diverge.

Diverger signifie « ne pas converger ».

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Les termes ne deviennent ni de plus en plus grands ni de plus en petits, ni se rapprochent de plus un plus d'un réel. u_n prend alternativement les valeurs -1 et 1.



Exercice résolu 9 page 63 - Conjecturer une limite

Pour chaque question, on donne un tableau de valeurs de la suite.
Conjecturer la limite de la suite, si elle existe.

a)

n	1	10	100	1000	10000
u_n	2	2,5	2,98	2,997	2,9999

b)

n	1	10	100	1000	10000
v_n	-1	-100	$-10\,000$	$-1\,000\,000$	$-100\,000\,000$

Solution

a) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n se rapprochent de la valeur 3.

Donc on conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

b) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes v_n prennent des valeurs de plus en plus grandes négatives.

Donc on conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Remarque

Une conjecture est une supposition que l'on fait, mais que **l'on ne démontre pas**.

Exercices du livre Sésamath

Page 63

19 On donne un tableau de valeurs de la suite.
Conjecturer la limite de la suite, si elle existe.

n	1	10	100	1 000	10 000
u_n	– 5,5	– 5,1	– 5,01	– 5,005	– 5,000 1

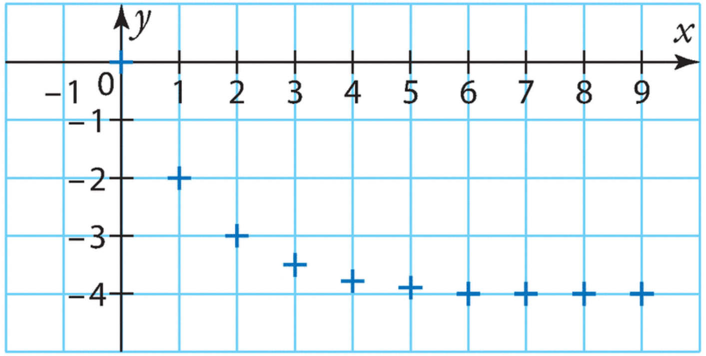
20 On donne un tableau de valeurs de la suite.
Conjecturer la limite de la suite, si elle existe.

n	1	10	100	1 000	10 000
v_n	4	1 600	24 000	4 800 000	1 520 000 000

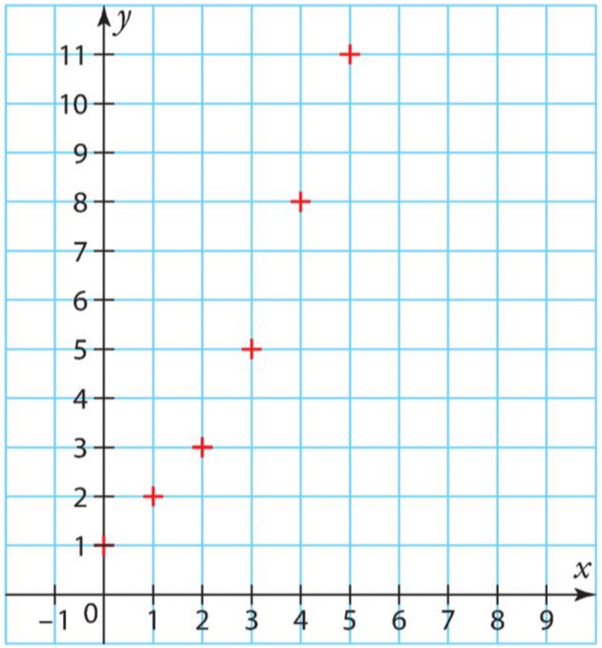
Page 67

83 Conjecturer, si elle existe, la limite des suites ci-dessous.

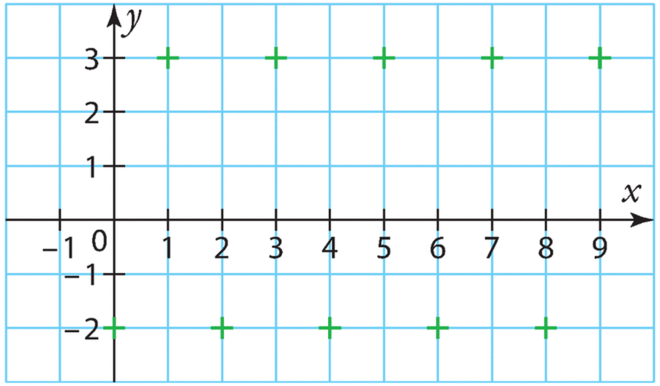
a)



b)



c)



Exercices du livre Sésamath

Page 67

84 Conjecturer, si elle existe, la limite des suites dont certaines valeurs sont données ci-dessous.

a) $u_1 = -1$, $u_{10} = -20$, $u_{1000} = -4\,000$, $u_{10000} = -5\,000$

b) $v_1 = 3$, $v_{10} = -2$, $v_{100} = 3$, $v_{1000} = -2$, $v_{10000} = 3$

c) $w_1 = -1$, $w_{100} = -1{,}95$, $w_{1000} = -1{,}98$, $w_{10000} = -1{,}99$

85 Conjecturer la limite des suites ci-dessous.

a) la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$

b) la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{1}{n}$

119 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite des suites suivantes, si elle existe.

a) (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = -n$

b) (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 5$

c) (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$

122 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3n + 2$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n).
2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le premier entier n tel que $u_n \geqslant 5\,000$.