Exercice n°81 page 158 (Livre Sésamath)

Une coopérative fabrique du jus de pomme. Elle produit entre 0 et 200 litres de jus. Elle a établi que ses coûts de production, en euros, de x dizaines de litres de jus de pommes étaient donnés par la fonction $C : x \longmapsto x^2 - x + 10$.
Chaque dizaine de litres produite sera vendue 19 €.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction C ?

La coopérative produit entre 0 et 200 litres de jus et x est exprimé en dizaines de litres donc C est définie sur $[0\,;20]$.

2. On appelle $R(x)$ la recette gagnée par la coopérative pour x dizaines de litres vendus.
Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
Comme chaque dizaine est vendue 19 €, $R(x) = 19 \times x$

3. On appelle $B(x)$ le bénéfice réalisé par la coopérative lorsqu'elle produit et vend x dizaines de litres de jus de pomme. Quel que soit x, on a $B(x) = R(x) - C(x)$. Montrer que la fonction bénéfice B est définie sur [0 ; 20] par $B(x) = -x^2 + 20x - 10$.

$$B(x) = R(x) - C(x) = 19x - (x^2 - x + 10) = 19x - x^2 + x - 10 = -x^2 + 20x - 10$$

4. Étudier les variations de la fonction B sur [0 ; 20].

$B'(x) = -2x + 10$ donc $B'(x) \geq 0 \iff x \in [0\,;10]$ et $B'(x) \leq 0 \iff x \in [10\,;20]$.
On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0		10		20
$B'(x)$		+	0	−	
B	−10	↗	90	↘	−10

5. En déduire le nombre de litres que la coopérative doit produire afin d'obtenir un bénéfice maximum.

La coopérative doit donc produire 10 dizaines de litres, c'est-à-dire 100 litres afin d'obtenir un bénéfice maximum.

Exercice n°88 page 158 (Livre Sésamath)

Soit f la fonction définie sur $[-6\,;\,8]$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$

Soit P sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1. Étudier les variations de f sur $[-6\,;\,8]$.
Justifier que la parabole admet une tangente « horizontale » D au point d'abscisse 1.

$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = 1$, on obtient alors le tableau des variations de f :

x	-6		1		8
f'		$-$		$+$	
$f(x)$	10	↘	$\frac{-9}{4}$	↗	10

$f'(1) = 0$ donc le coefficient directeur de la tangente à P au point d'abscisse 1 est nul, ce qui signifie que la parabole admet une tangente « horizontale » au point d'abscisse 1.

2. a) Déterminer l'équation de la tangente T_A à P au point A d'abscisse -2.

La tangente T_A admet pour équation : $y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$ avec $x_A = -2$ et $f'(x_A) = -\frac{3}{2}$

Donc : $y = -\frac{3}{2}(x + 2) + 0$ soit $T_A : y = -\frac{3}{2}x - 3$.

b) Étudier la position relative de T_A et P.

Pour étudier la position d'une courbe par rapport à une autre, il faut étudier le signe de la différence de leurs équations.

Étudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x - 3\right)$ sur $[-6\,;8]$.

$$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x - 3\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{2}x + 3 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 > 0$$

$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x - 3\right) > 0$ donc la parabole est au-dessus de T_A.

3. a) Déterminer l'équation de la tangente T_B à au point B d'abscisse 0.

La tangente T_B admet pour équation : $y = f'(x_B) \times (x - x_B) + f(x_B)$ avec $x_B = 0$ et $f'(x_B) = -\frac{1}{2}$

Donc : $y = -\frac{1}{2}(x + 0) - 2$ soit $T_B : y = -\frac{1}{2}x - 2$.

b) Étudier la position relative de T_B et P.

Étudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x - 2\right)$ sur $[-6\,;8]$.

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x - 2\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 + \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{4}x^2 > 0$$

$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x - 2\right) > 0$ donc la parabole est au-dessus de T_B.

4. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, puis placer les points correspondants dans le repère orthonormé.

x	-6	-4	-2	0	1
$f(x)$	10	4	0	-2	$-\frac{9}{4}$

5. Tracer les droites T_A, T_B et D.

6. À l'aide des questions précédentes, tracer l'arc de la parabole P situé sur l'intervalle $[-6\,;\,1]$.

7. Sachant que la parabole P admet un axe de symétrie passant par son sommet, finir le tracé de P sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.