Variables aléatoires réelles

I. Variables aléatoires réelles

II. Espérance — Variance — Écart-type

II. Espérance — Variance — Écart-type

1) Définitions

Dans ce paragraphe, X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Définition - Espérance

L'espérance de X est le nombre réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

Exemple

On considère une variable aléatoire Y dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

On a $E(Y) = -4 \times 0{,}5 + 0 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}2 + 20 \times 0{,}1 = 0{,}8$

Remarques

- Lorsque X est une variable aléatoire donnant le gain algébrique à un jeu, $E(X)$ est le **gain moyen que peut espérer** un joueur sur un grand nombre de parties à ce jeu.
- Un jeu est équitable si l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain algébrique est nulle.

Exercice résolu 3 page 307

Exercice résolu 3 page 307

Calculer et utiliser une espérance

Un jeu de grattage permet de gagner jusqu'à 5 000 C. Le ticket du jeu est vendu 2 €.
On note X la variable aléatoire donnant le gain (en tenant compte de la mise) lorsque l'on choisit au hasard un ticket.
La loi de probabilité de X est donnée par :
Ce jeu est-il équitable ?

x_i	−2	8	98	4 998
$p(X = x_i)$	0,85	0,149 9	0,000 09	0,000 01

Solution

Pour répondre à cette question, il faut calculer l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain à ce jeu.

D'après le cours, la formule est :

$$E(X) = -2 \times 0{,}85 + 8 \times 0{,}1499 + 98 \times 0{,}00009 + 4998 \times 0{,}00001 \approx -0{,}442.$$

Cela signifie donc que, si on répète ce jeu en grattant un grand nombre de tickets, on peut « espérer » perdre en moyenne 0,442 € (par ticket gratté).

L'espérance n'étant pas nulle, ce jeu n'est pas équitable.

Conseils & Méthodes
Un jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$
On peut utiliser la calculatrice pour obtenir l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire (voir le TP1)

Exercices page 307 du livre Sésamath

7 Une urne contient 4 tickets numérotés 0 ; 1 ; 10 et 20. Un joueur mise 4 € puis tire au hasard un ticket qui lui indique le montant qu'il gagne.
Quel gain moyen peut-il espérer s'il joue un grand nombre de fois à ce jeu ?

Corrigé

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

X peut prendre les valeurs -4 ; -3 ; 6 ; 16

Chaque ticket a une chance sur 4 d'être obtenu, on peut alors donner la loi de probabilité de X :

x_i	-4	-3	6	16
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \frac{1}{4} \times (-4) + \frac{1}{4} \times (-3) + \frac{1}{4} \times 6 + \frac{1}{4} \times 16 = 3{,}75,$$

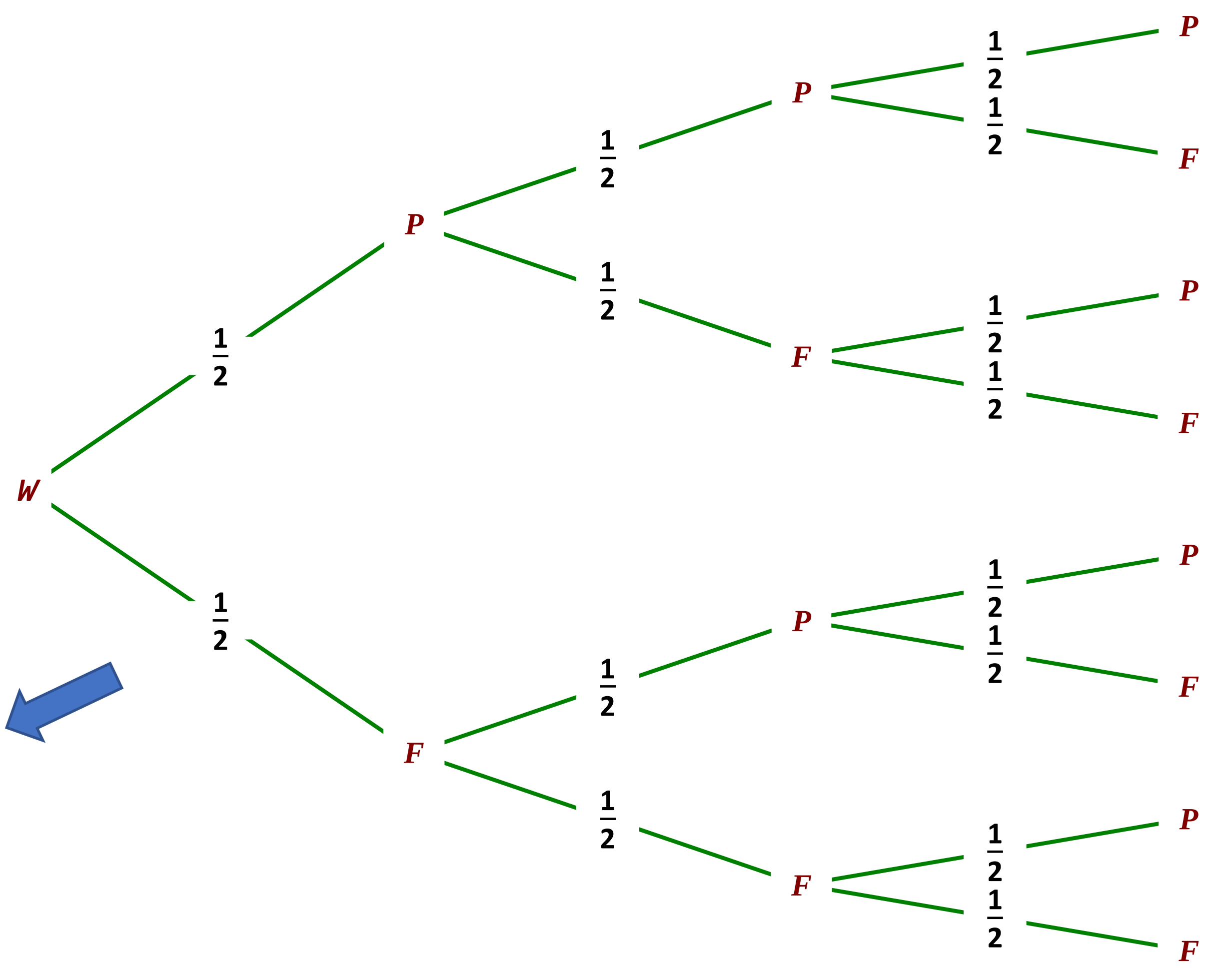
c'est ce que l'on peut espérer gagner en moyenne sur un grand nombre de parties.

Exercices page 307 du livre Sésamath

8 On mise 3 € puis on lance trois fois de suite une pièce équilibrée.
On gagne 2 € par Pile obtenu.
Ce jeu est-il équitable ?

Corrigé

En s'aidant d'un arbre de probabilités:



x_i	-3	-1	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Alors $E(X) = (-3) \times \frac{1}{8} + \ldots + 3 \times \frac{1}{8} = 0$ donc le jeu est équitable.

Définition – Variance

La variance de X est le nombre noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = p_1 \times \left(x_1 - \left(E(X)\right)\right)^2 + p_2 \times \left(x_2 - \left(E(X)\right)\right)^2 + \cdots + p_n \times \left(x_n - \left(E(X)\right)\right)^2$$

Exemple

y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

$E(Y) = 0{,}8$

$$V(Y) = 0{,}5 \times (-4 - 0{,}8)^2 + 0{,}2 \times (0 - 0{,}8)^2 + 0{,}1 \times (20 - 0{,}8)^2 = 50{,}56$$

Définition - Écart-type

L'écart-type de X est le nombre réel noté $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on a : $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{50{,}56} \approx 7{,}11$.

Remarques

- Ces définitions sont à mettre en lien avec celles de moyenne, variance et écart-type d'une série statistique.

  On peut donc aussi utiliser la calculatrice ou un tableur pour déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire si on a résumé la loi de probabilité de la variable aléatoire dans un tableau (voir le **TP1**)

- Comme en statistiques, l'écart-type permet de se donner une idée de la répartition des valeurs prises par une variable autour de son espérance en tenant compte des probabilités.

  Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs prises par la variable aléatoire sont « éloignées » de l'espérance.

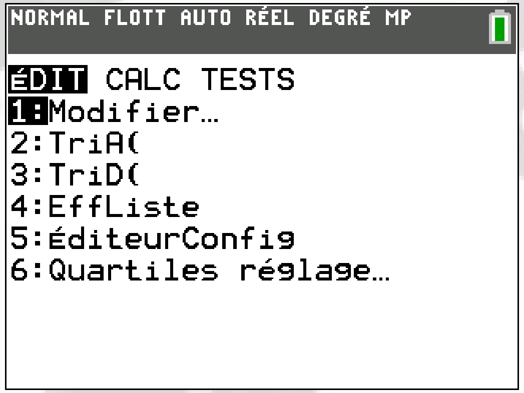
A l'aide de la calculatrice :

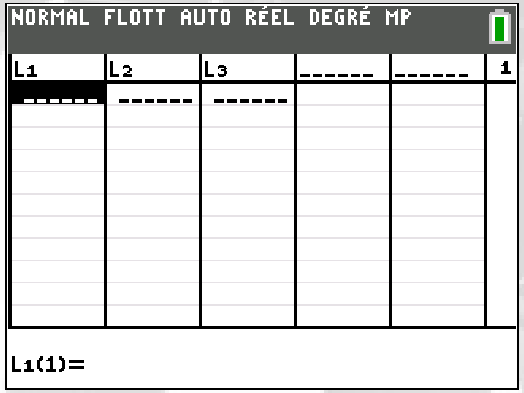
y_i	-4	0	4	20
$p(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

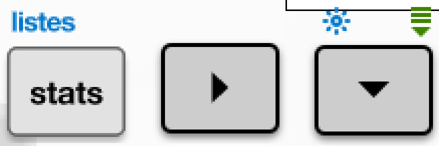
$$E(Y) = 0{,}8 \qquad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{50{,}56} \approx 7{,}11.$$

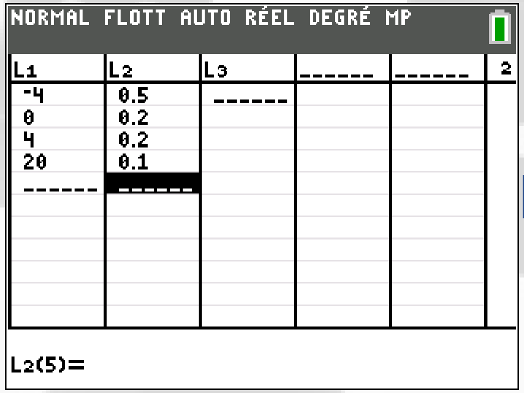
pour accéder aux fonctions statistiques de la calculatrices

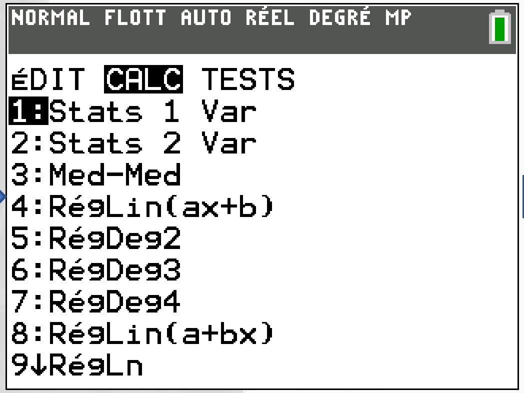
Effacer le contenu des Listes 1 et 2 que nous allons utiliser.

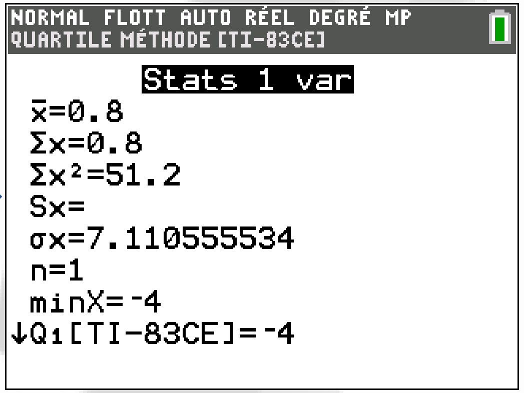












2) Propriétés des indicateurs

Propriétés – Formule de König-Huygens

On a :

$$V(X) = p_1 \times (x_1)^2 + p_2 \times (x_2)^2 + \cdots + p_n \times (x_n)^2 - \left(E(X)\right)^2$$

Exemple

$\boldsymbol{x_i}$	-4	0	4	20
$p_i = p(\mathbf{X} = \boldsymbol{x}_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1
$(x_i)^2$	16	0	16	400
$p_i \times (x_i)^2$	8	0	3,2	40

$E(Y) = 0{,}8$

$$V(X) = 8 + 0 + 3{,}2 + 40 - (0{,}8)^2 = 51{,}2 - 0{,}064 = 50{,}56$$

Définitions - Variable aléatoire $\boldsymbol{aX + b}$

Pour tous nombres réels a et b, on peut définir une nouvelle variable aléatoire en associant à chaque issue donnant la valeur x_i , le nombre réel $ax_i + b$.

Cette nouvelle variable aléatoire se note $aX + b$.

Exemple

Z est une variable aléatoire donnant le gain en euros à un jeu auquel on peut gagner 2, 4 ou 8 €.

Z peut donc prendre les valeurs 2, 4 ou 8.

Les organisateurs décident de multiplier les gains par 2 puis de soustraire 1 €.

On obtient alors la variable aléatoire Z' telle que $Z' = 2Z - 1$, qui donne les gains en euros suite à cette modification.

Z' peut prendre les valeurs $2 \times 2 - 1 = 3$; $2 \times 4 - 1 = 7$ ou $2 \times 8 - 1 = 15$

Propriété - $E(aX+\ b)$ et $V(aX+\ b)$

Soit a et b deux nombres réels. On a :

- $E(aX+\ b) = \ a \times E(X)\ +\ b$
- $V(aX+\ b) = \ a^2 \times V(X)$
- $\sigma(aX\ +\ b) = |a| \times \sigma(x)$

Démonstration

Pour l'espérance :

$$
\begin{aligned}
E(aX+\ b) &= p_1 \times (ax_1 + b) + p_2 \times (ax_2 + b) + \cdots + p_n \times (ax_n + b) \\
&= ax_1p_1 + p_1b + ap_2x_2 + p_2b + \cdots + ap_nx_n \\
&= a\,\underbrace{(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + p_nx_n)}_{E(x)} + b\,\underbrace{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)}_{1} \\
&= aE(x) + b
\end{aligned}
$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, si on a $E(Z)\ =\ 3{,}4$ alors :

$$E(Z') = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2 \times 3{,}4 - 1 = 5{,}8$$

Exercices page 309 du livre Sésamath

34 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	4	6
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X.
2. En utilisant les définitions du cours, calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X.
3. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

36 Les lois de probabilités de deux variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-dessous.

x_i	-8	0	8	20
$p(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	-20	-12	-2	10	15
$p(Y = y_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,4

1. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

53 Une urne contient 40 tickets numérotés de 1 à 40.
On mise 5 € puis on tire au hasard, successivement et avec remise, deux tickets de l'urne.
Pour chaque ticket dont le numéro est inférieur ou égal à 12, on gagne 8 €.
Quel est le gain algébrique que l'on peut espérer à ce jeu sur 1 000 parties ?

↪ **Pour des cas sans remise, Exercices 87 et 88 p. 316**

62 On propose à Ruben les deux tombolas suivantes qui ont lieu tous les week-end :
- La tombola A où le ticket coûte 5 €. Il y a 500 tickets dont 5 permettent de gagner 200 €, 10 permettent de gagner 100 € et les autres tickets sont perdants ;
- La tombola B où le ticket coûte 2 €. Il y a 800 tickets dont 2 permettent de gagner 250 €, 40 permettent de gagner 10 € et les autres tickets sont perdants.

1. Modéliser ces deux tombolas par des variables aléatoires X et Y donnant les gains (en tenant compte de la mise).
2. Calculer les espérances et écarts-type de X et Y.
3. Comparer ces deux tombolas.

34 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	4	6
$p(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

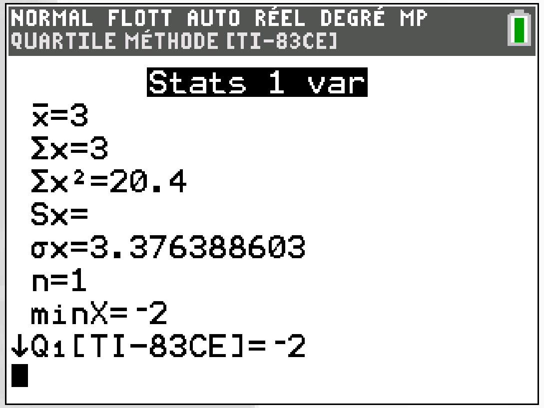
1. En utilisant la définition du cours, calculer l'espérance de X.
2. En utilisant les définitions du cours, calculer la variance de X et en déduire l'écart-type de X.
3. Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

Corrigé

$$1)\ E(X) = -2 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{4}{10} = 3$$

$$2)\ V(X)$$
$$= \frac{3}{10}(-2-3)^2 + \frac{3}{10}(4-3)^2 + \frac{4}{10}(6-3)^2$$
$$= \frac{57}{5} = 11{,}4$$

$$Donc\ \ \sigma = \sqrt{11{,}4} \approx 3{,}38$$



36 Les lois de probabilités de deux variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-dessous.

x_i	-8	0	8	20	
$p(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25	
y_i	-20	-12	-2	10	15
$p(Y = y_i)$	0,1	0,1	0,15	0,25	0,4

1. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Comparer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

$$1)\ E(X) = 5\ \ et\ \ E(Y) = 5$$

les espérances sont égales

2. $\sigma(X) \approx 10{,}34$ et $\sigma(Y) \approx 12{,}04$.
L'écart-type de Y est légèrement supérieur à celui de X.

53 Une urne contient 40 tickets numérotés de 1 à 40.
On mise 5 € puis on tire au hasard, successivement et avec remise, deux tickets de l'urne.
Pour chaque ticket dont le numéro est inférieur ou égal à 12, on gagne 8 €.
Quel est le gain algébrique que l'on peut espérer à ce jeu sur 1 000 parties ?

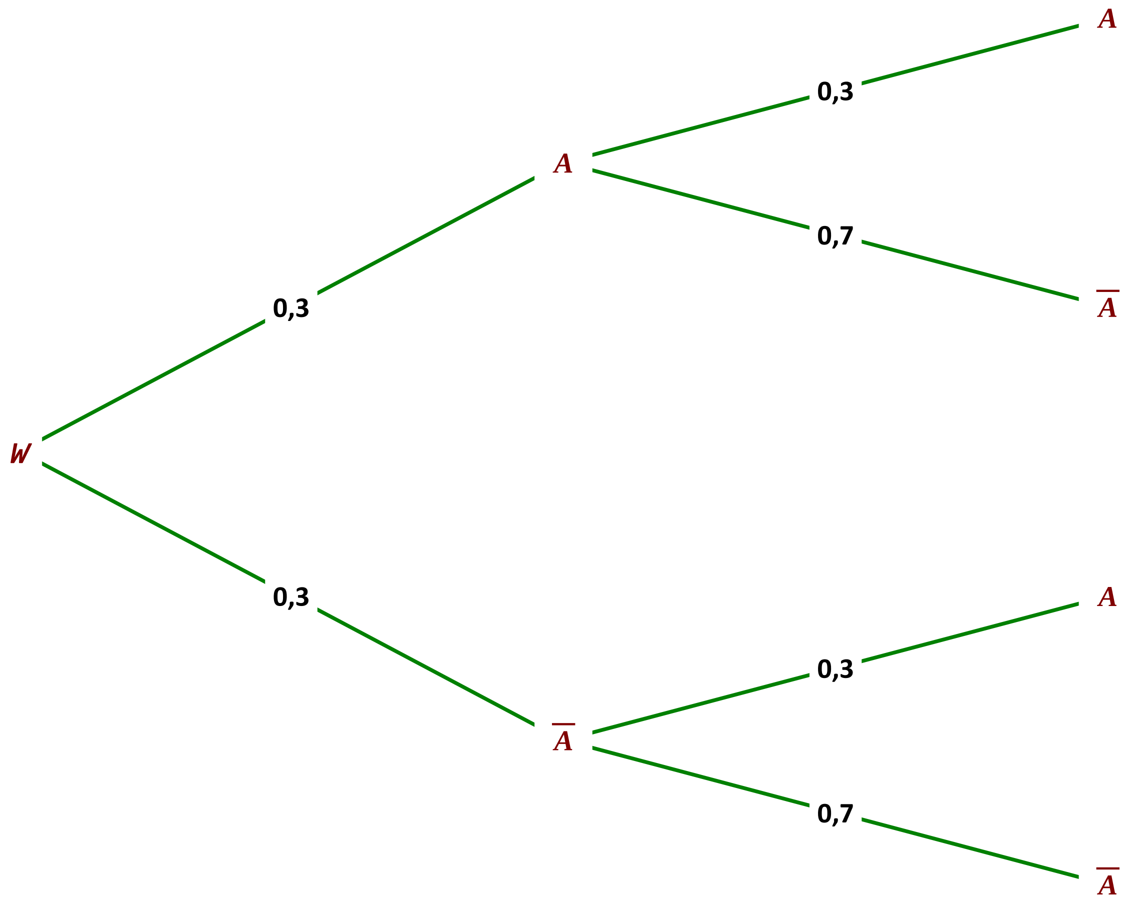
↪ **Pour des cas sans remise, Exercices 87 et 88 p. 316**

Corrigé

Soit A l'évènement: « le ticket a un numéro inférieur ou égal à 12 ».

Alors $P(A) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

Dressons un arbre de probabilité



Soit X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

X peut prendre les valeurs: 11 , 3 et -5.

A l'aide de l'arbre on obtient la loi de probabilité de X donnée par le tableau suivant:

x_i	11	3	-5
$p(X = x_i)$	0,09	0,42	0,49

Alors $E(X) = -0{,}2$: c'est le gain algébrique moyen par partie sur un grand nombre de parties.
On peut donc perdre 200 euros sur 1 000 parties.

62 On propose à Ruben les deux tombolas suivantes qui ont lieu tous les week-end :

- La tombola A où le ticket coûte 5 €. Il y a 500 tickets dont 5 permettent de gagner 200 €, 10 permettent de gagner 100 € et les autres tickets sont perdants ;
- La tombola B où le ticket coûte 2 €. Il y a 800 tickets dont 2 permettent de gagner 250 €, 40 permettent de gagner 10 € et les autres tickets sont perdants.

1. Modéliser ces deux tombolas par des variables aléatoires X et Y donnant les gains (en tenant compte de la mise).

2. Calculer les espérances et écarts-type de X et Y.

3. Comparer ces deux tombolas.

Corrigé

62. 1. Pour la tombola A

x_i	195	95	-5
$p(X = x_i)$	0,01	0,02	0,97

Pour la tombola B

x_i	248	8	-2
$p(X = x_i)$	0,0025	0,05	0,9475

2. $E(X) = -1$ et $\sigma(X) \approx 24{,}17$

$E(Y) = -0{,}875$ et $\sigma(Y) \approx 12{,}65$

3. Les espérances ne sont pas égales (on perd en moyenne moins d'argent avec la tombola B).

L'écart-type est plus grand pour la tombola A : le jeu peut permettre des écarts de gain plus grands.

Exercices page 312-313 du livre Sésamath

47 Une urne contient n (n entier supérieur ou égal à 10) boules indiscernables au toucher dont cinq sont rouges, deux sont vertes et les autres sont jaunes.
On tire au hasard une boule dans l'urne. Si celle-ci est verte, on gagne 3 €, si elle est jaune on gagne 5 €, sinon on perd 2 €.
X est la variable aléatoire associant le gain algébrique au jeu.
1. Déterminer la loi de probabilité de X (les probabilités seront écrites en fonction de n).
2. Comment faut-il choisir n pour que la probabilité de gagner de l'argent à ce jeu soit supérieure ou égale à 0,6 ?

60 La roulette du casino comporte 37 cases numérotées de 0 à 36. Pour les nombres entiers de 1 à 36, on sait que 18 nombres sont situés sur des cases rouges, les autres étant sur des cases noires.
Le 0 est sur une case verte à l'avantage du casino.
1. Tom mise 10 € sur son numéro fétiche entre 1 et 36. Si la bille s'arrête sur son numéro, il remporte 36 fois sa mise, sinon il perd sa mise.
a) Modéliser cette situation par une variable aléatoire X donnant le gain algébrique à ce jeu.
b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. Interpréter ces résultats.
2. Hélène mise 10 € sur la couleur rouge.
Si la bille s'arrête sur une case rouge, elle remporte 2 fois sa mise, sinon elle perd sa mise.
a) Modéliser cette situation par une variable aléatoire Y donnant le gain algébrique à ce jeu.
b) Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$. Interpréter ces résultats.
3. Doit-on conseiller à Tom et Hélène de jouer un grand nombre de parties ?
4. Léo veut jouer une seule partie.
Que peut-on lui conseiller ?

68 Lorsqu'elle se rend à son sport le week-end, Laurène est toujours en retard. Il y a une probabilité égale à 0,6 pour qu'elle arrive avec 5 min de retard, une probabilité égale à $\frac{1}{4}$ pour qu'elle arrive avec 10 min de retard et, le reste du temps, elle est en retard de 15 min.
Soit D la variable aléatoire donnant le temps de retard en minute (arrondi à 5, 10 ou 15 min) de Laurène lorsqu'elle se rend à son sport.

1. Calculer $E(D)$.

2. Pour faire une petite cagnotte, ses amis ont mis en place un système d'amendes : elle devra payer 0,50 € par minute de retard.
Quelle est la somme payée par Laurène que peuvent espérer ses amis en moyenne par week-end ?

3. Finalement, Laurène a changé ses habitudes : la probabilité qu'elle arrive en retard de 5 min devient égale à 0,5 ; la probabilité qu'elle arrive en retard de 10 min devient égale à 0,2. Le reste du temps, elle n'est plus en retard. Ses amis ont envie de changer le montant de l'amende.
Comment choisir le prix en euros de la minute de retard pour que le montant payé en moyenne par Laurène devienne inférieur ou égal à 3 € ?