Lois à densité

I. Variables aléatoires à densité

Exemple :
Dans une bouteille vide de contenance 1,5 litres, on verse une quantité au hasard d'eau. On considère la variable aléatoire X égale à ce volume d'eau en litres.
Cette quantité peut être égale à n'importe quel nombre de l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.
Cela signifie que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.

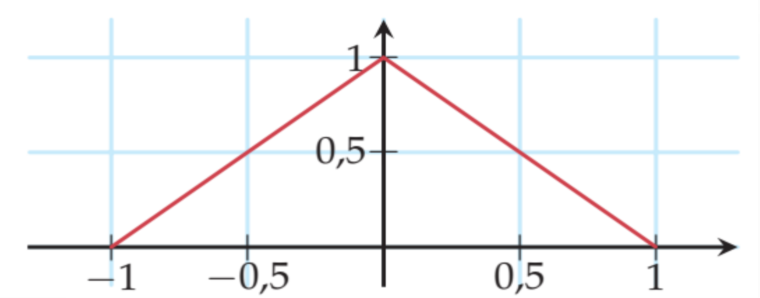
Remarque
Jusqu'à présent on a travaillé avec des variables aléatoires **discrètes** qui prennent un nombre fini de valeurs et leur loi est soit connue (binomiale ou Bernoulli), soit présentable sous la forme d'un tableau. Dans l'exemple précédent, la variable aléatoire prend une infinité de valeurs et toutes ces valeurs sont dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

Si une fonction f définie sur un intervalle I est **continue et positive sur $\boldsymbol{I}$** et si l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est **égale à 1** (unité d'aire) alors on dit que f est une **fonction de densité** (ou une **densité de probabilité**).

Exemple

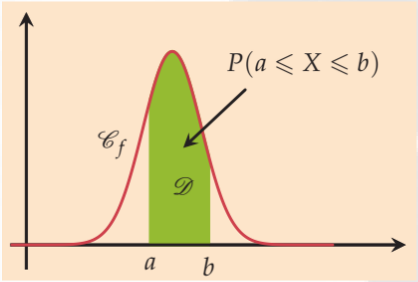
On considère la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 \ \ si\ \ x \in [-1\ ;\ 0[\\ -x+1 \ \ si\ \ x \in [0\ ;\ 1] \end{cases}$.



La fonction f est **positive** et **continue** sur $[-1\ ;\ 1]$.
De plus, le domaine entre la courbe de f et l'axe des abscisses sur $[-1\ ;\ 1]$ est un triangle d'aire $\frac{2\times 1}{2} = 1$: la fonction f est donc une fonction de densité.

Définition

Soit f une fonction de densité sur un intervalle I.
Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie que pour tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans I on a $P(a \leqslant X \leqslant b) = aire(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D}$ est le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



$$On\ a\ alors\ P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Remarques

- On dit alors que X est une **variable aléatoire à densité**.
- La probabilité qu'une variable aléatoire à densité X prenne une valeur c est égale à 0 car

$$P(X = c) = \int_c^c f(t)\,dt = 0$$

Par conséquent, les éventuelles inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges dans les calculs de probabilités : par exemple $P(1 < X \leqslant 3) = P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

Exercices du livre Sésamath page 369

Exercice 14 page 369

Parmi les exemples, donner ceux que l'on peut modéliser à l'aide d'une variable aléatoire pouvant prendre pour valeurs tous les réels d'un intervalle et, le cas échéant, indiquer cet intervalle.

1. On étudie le temps d'attente à l'accueil d'un standard téléphonique.
2. On lance un dé à 12 faces et on gagne 5 euros si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à 10, on perd 2 euros sinon.

   On étudie le gain obtenu.
3. En Europe, on estime qu'il y a 30 de personnes myopes. On choisit au hasard un groupe de 50 personnes au hasard.

   On étudie le nombre de personnes myopes dans ce groupe.
4. On étudie la taille des élèves d'un collège.
5. On étudie le temps avant qu'une voiture rouge passe à un carrefour.

Exercice 15 page 369

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 2]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$.

1. Montrer que f est une fonction de densité sur $[0\ ;\ 2]$.
2. Soit X la variable aléatoire admettant f pour densité. Calculer les probabilités suivantes : 2
3. $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$
4. $P(X \leqslant 1)$
5. $P(X > 1)$
6. $P(0 \leqslant X \leqslant 2)$

Exercices du livre Sésamath page 369

Exercice 16 page 369

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = ax^2$.

1. Déterminer la valeur de a telle que f soit une fonction de densité sur $[0\ ;\ 1]$.
2. Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de densité f pour la valeur de a trouvée à la question précédente.

Calculer les probabilités suivantes : 2

3. $P(0{,}1 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$
4. $P(X \leqslant 0{,}1)$
5. $P(X < 0{,}5)$
6. $P_{(X \geqslant 0{,}5)}(X \geqslant 0{,}1)$

Exercice 17 page 369

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ \pi]$ par $g(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$.

1. Montrer que g est une fonction de densité sur $[0\ ;\ \pi]$.
2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité g.

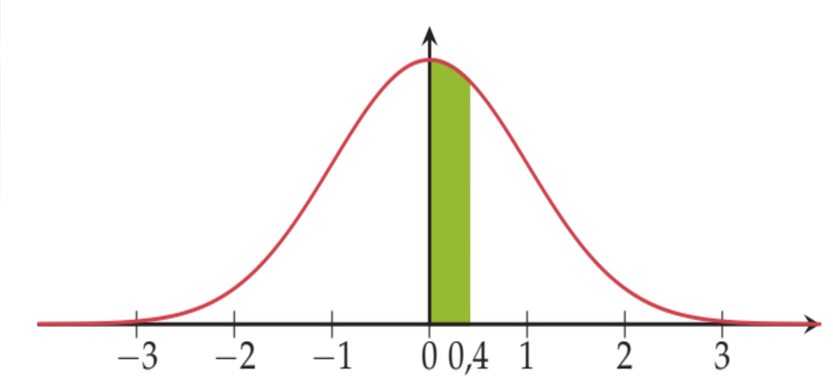
(a) Calculer $P\left(X \leqslant \frac{\pi}{3}\right)$.

(b) Déterminer la valeur du nombre a telle que $P(X \leqslant a) = P(X \geqslant a)$.

Exercices du livre Sésamath page 369

Exercice 19 page 369

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ est représentée ci-dessous

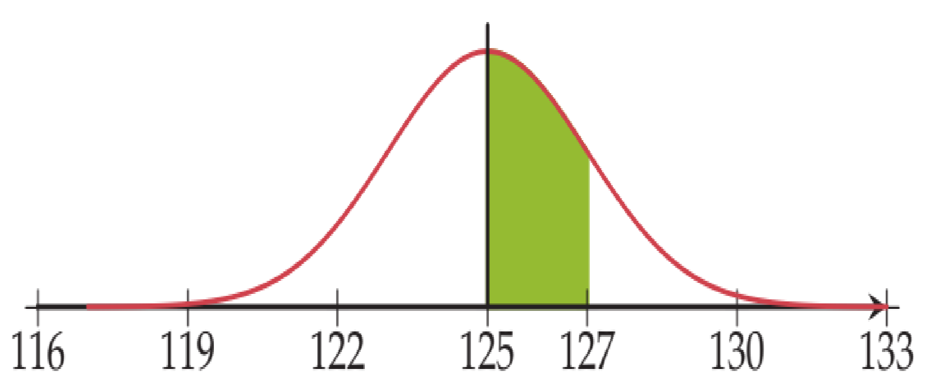


On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et que $P(0 \leqslant X \leqslant 0{,}4) = 0{,}155$.

Donner une valeur approchée de : 2 $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0)$ $P(X > 0{,}4)$ $P(X \leqslant 0{,}4)$ $P(-0{,}4 \leqslant X \leqslant 0{,}4)$

Exercice 20 page 369

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ est représentée ci-dessous :



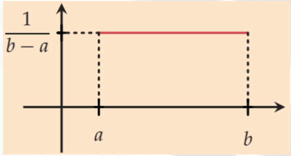
On admet que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$ (tracée ci-dessus) et que $P(125 \leqslant X \leqslant 127) = 0{,}341$.

Donner une valeur approchée de : 2 $P(123 \leqslant X \leqslant 125)$ $P(X > 125)$ $P(X \leqslant 123)$ $P(127 \leqslant X)$

II. Loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$** si elle admet pour densité la fonction constante f définie sur $[a\ ;\ b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$.



Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ et $[c\ ;\ d]$ un intervalle inclus dans $[a\ ;\ b]$.
Alors on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = \frac{d-c}{b-a}$.

Preuve :

X admet pour densité $f : t \mapsto \frac{1}{b-a}$ sur $[a\ ;\ b]$.

Donc on a $P(X \in [c\ ;\ d]) = \int_c^d f(t)\,dt = \left[\frac{1}{b-a}t\right]_c^d = \frac{d-c}{b-a}$.

Propriété

On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ de densité f et on appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = \int_a^b tf(t)\,dt$$

On a alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Preuve :

On a $E(X) = \int_a^b tf(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.

Méthode 1 : Calculer une probabilité et une espérance pour une loi uniforme

On utilise les différentes formules des propriétés ou on calcule à l'aide de la fonction de densité et des intégrales.

Exercice d'application

Armand et Lise rentrent de l'école à pied. Leurs parents savent qu'ils doivent arriver entre 17h et 18h à la maison. On peut modéliser leur heure d'arrivée par une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[17\ ;\ 18]$.

1. Quelle est la probabilité qu'ils arrivent entre 17h et 17h15 ?
2. À quelle heure leurs parents peuvent-ils espérer les voir arriver ?

Corrigé

1. Sous forme décimale, 17h15$=17{,}25$h puis $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \frac{17{,}25-17}{18-17} = 0{,}25$.
2. On a $E(X) = \frac{17+18}{2} = 17{,}5$ donc leurs parents peuvent espérer les voir arriver à 17h30.

Remarque : Pour la question 1 de la méthode 1, comme $f : t \mapsto \frac{1}{18-17} = 1$ sur $[17\ ;\ 18]$ est la fonction de densité de X, on aurait aussi pu calculer $P(17 \leqslant X \leqslant 17{,}25) = \int_{17}^{17{,}25} 1\, dt = [t]_{17}^{17{,}25} = 17{,}25 - 17 = 0{,}25$.

Exercices du livre Sésamath page 369

Exercice 22 page 369

On modélise le choix d'un nombre réel dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme.

1. Calculer les probabilités : 2
2. $P(X \in [1\ ;\ 5{,}5])$;
3. $P(2{,}7 \leqslant X < 6)$.
4. Que vaut l'espérance de X ?

Exercice 24 page 369

Y est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-4\ ;\ 4[$.

1. Quelle formule faut-il entrer dans un tableur pour simuler la variable aléatoire Y ?
2. Calculer $E(Y)$.
3. Calculer $P(Y^2 > 1)$ et $P_{Y<2}(Y < 1{,}5)$.

Exercice 26 page 369

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[0\ ;\ a]$ (où a est un nombre strictement positif) dont la fonction densité est donnée par $f(x) = 0{,}02$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer les probabilités : 2
3. $P(X \in [0\ ;\ \pi])$
4. $P(1 \leqslant X < 12{,}2)$
5. $P(X^2 + 2X = 0)$
6. $P(X^2 < 9)$

Exercice 27 page 369

Camille a dit à Solène qu'il passerait la voir chez elle pour récupérer un meuble entre 10h et 12h. N'ayant pas prévu d'heure précise, il peut arriver à tout instant.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire H donnant l'heure d'arrivée de Camille ?
2. Calculer la probabilité que Camille arrive : avant 11h20 ; à 11h précise ; entre 10h et 10h05
3. Camille n'est toujours pas arrivé à 10h40. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 11h20 ?