

Produit scalaire dans l'espace et applications

Connaissances nécessaires à ce chapitre

- ▶ Calculer un produit scalaire dans le plan en utilisant ses différentes expressions
- ▶ Calculer la mesure d'un angle géométrique, une longueur
- ▶ Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

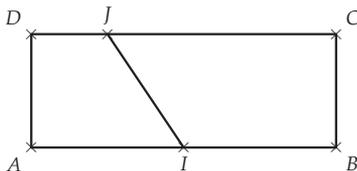


Auto-évaluation

Des ressources numériques pour préparer le chapitre sur manuel.sesamath.net



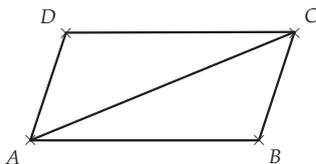
1 Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$. Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\vec{DJ} = \vec{DC}$.



Calculer les produits scalaires suivants :

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- $\vec{AB} \cdot \vec{JI}$
- $\vec{BC} \cdot \vec{JI}$
- $\vec{AC} \cdot \vec{JI}$

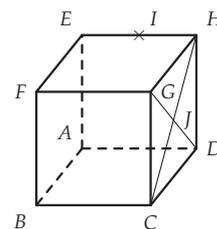
2 Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 2$ et $AC = 5$.



1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.

- En déduire aussi que la mesure de l'angle \widehat{BAD} , au dixième de degré près.
 - En remarquant que $BD^2 = \vec{BD}^2$, en déduire que $BD = \sqrt{15}$.

3 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.



- Donner les coordonnées du point G dans le repère :
 - $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$
 - $(C; \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{CG})$
 - $(H; \vec{HE}, \vec{HD}, \vec{HG})$
 - $(F; \vec{FB}, \vec{FG}, \vec{FE})$
- Même question avec le point B .
- Même question avec le point J .



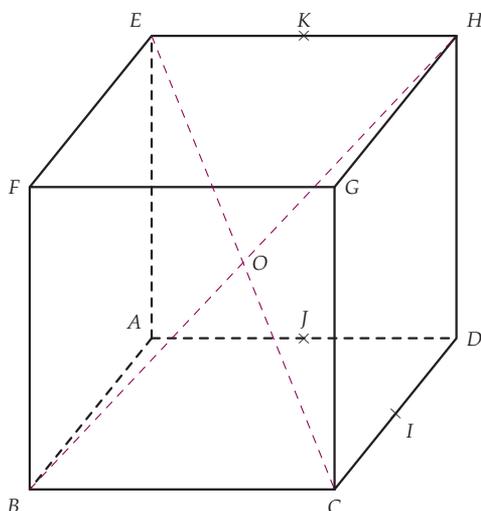
Voir solutions p. 419



ACTIVITÉ 1 Produit scalaire dans l'espace... ou dans un plan ?

INFO

Considérons un cube $ABCDEFGH$ d'arête 2. On note O le centre de ce cube ainsi que I, J et K les milieux respectifs des arêtes $[CD]$, $[AD]$ et $[EH]$.



On pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique afin de modifier l'angle de vue et obtenir un meilleur aperçu des vecteurs et plans de la figure.

Ci-dessous, les menus et outils utilisés pour obtenir cette figure avec le logiciel CaRMetal.



Dans chacun des cas suivants :

- 1) mettre en évidence un plan contenant des représentants des vecteurs donnés ;
- 2) calculer leur produit scalaire dans ce plan.

a) \vec{AB} et \vec{AC}	d) \vec{OB} et \vec{OH}	g) \vec{OE} et \vec{OH}
b) \vec{BD} et \vec{BH}	e) \vec{EF} et \vec{AG}	h) \vec{IJ} et \vec{FH}
c) \vec{AB} et \vec{AG}	f) \vec{FB} et \vec{AK}	i) \vec{AD} et \vec{BK}

DÉBAT 2 Un calcul toujours possible ?

- 1) On considère le même cube que dans l'activité 1.
Le produit scalaire $\vec{KI} \cdot \vec{AG}$ est-il calculable ? Expliquer pourquoi.
- 2) Plus généralement, le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace existe-t-il toujours ?

ACTIVITÉ 3 Caractérisation normale d'un plan

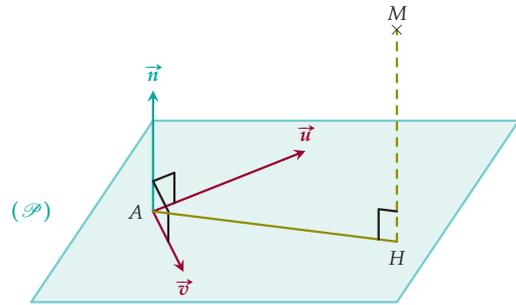
Partie A : En théorie

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un plan (\mathcal{P}) passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} .

Soit \vec{n} un vecteur non nul, simultanément orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .

- 1) a) Démontrer que \vec{n} est aussi orthogonal à tout vecteur \vec{w} de (\mathcal{P}) .
b) En déduire que si M est un point de (\mathcal{P}) , alors $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$.
- 2) Démontrons maintenant la réciproque.

- a) Énoncer cette réciproque.
 b) Soit M un point de l'espace.
 On considère le point H , projeté orthogonal de M sur le plan (\mathcal{P}) .
 Démontrer, en calculant $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}$, que si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, alors $HM = 0$ puis en déduire que $M \in (\mathcal{P})$.



- 3) Énoncer la propriété démontrée.

Partie B : En pratique

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (\mathcal{P}) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -1 + 2s + t \\ y &= -1 + s + 2t \\ z &= -s + 4t \end{cases}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

- 1) Donner les coordonnées d'un point A appartenant à (\mathcal{P}) ainsi que celles de deux vecteurs directeurs de (\mathcal{P}) , que l'on notera \vec{u} et \vec{v} .
 2) On cherche les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'un vecteur \vec{n} qui soit orthogonal à la fois à \vec{u} et à \vec{v} .
 a) Démontrer que les réels a, b et c satisfont le système suivant, que l'on note (\mathcal{S}) :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2a + b - c &= 0 \\ a + 2b + 4c &= 0 \end{cases}$$

- b) Démontrer les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} 2a + b - c &= 0 \\ -2a - 4b - 8c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + b - c &= 0 \\ -3b - 9c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 2c \\ b &= -3c \end{cases}$$

- c) En déduire la forme générale du vecteur \vec{n} , pour $c \in \mathbb{R}^*$ puis, en choisissant judicieusement une valeur de c , donner un vecteur \vec{n} particulier.

ACTIVITÉ 4 Équation cartésienne

INFO

En Première S, on a démontré que dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une droite est caractérisée par une équation du type $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas simultanément nuls.

On a ensuite vu, au chapitre G2, qu'une droite de l'espace n'est plus du tout caractérisée de la même façon puisqu'elle est caractérisée dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une représentation paramétrique du type :

$$\begin{cases} x &= x_A + \alpha t \\ y &= y_A + \beta t \\ z &= z_A + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

où α, β et γ ne sont pas simultanément nuls et x_A, y_A et z_A sont les coordonnées d'un point de la droite.



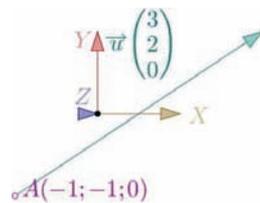
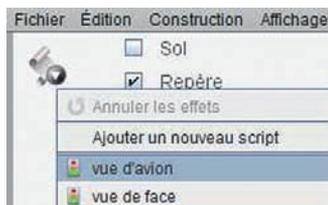
On peut alors légitimement se poser la question suivante : « Que caractérise une équation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls ? »

Partie A : Expérimentation

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et on considère l'ensemble (\mathcal{E}) des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$2x - 3y + z - 1 = 0.$$

- 1) On se place dans le plan d'équation $z = 0$.
 - a) Dans ce plan, décrire le plus précisément possible l'ensemble de points que représente l'équation $2x - 3y - 1 = 0$.
 - b) Représenter cet ensemble de points en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui propose une vision 3D.
Ci-dessous, les menus utilisés pour obtenir cette figure avec le logiciel CaRMetal, ainsi qu'une capture de la figure obtenue.



- 2) Adopter la démarche de la question 1) :
 - a) dans le plan d'équation $y = 0$, en « vue de gauche » ;
 - b) dans le plan d'équation $x = 0$, en « vue de face ».
- 3) Que semblent définir ces trois droites ? Trois droites étaient-elles nécessaires ? Combien de droites suffisaient ?
- 4) Si on procède par analogie avec les équations de droites dans le plan, que pourrait représenter le vecteur ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Représenter ce vecteur afin de donner du poids à cette conjecture.

Partie B : Démonstration

Soient $A(-1; -1; 0)$, $B(1; 0; -1)$ et $C(0; 1; 4)$ trois points appartenant à (\mathcal{E}) .

On note (\mathcal{P}) le plan passant par A et dirigé par $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- 1) a) Donner une représentation paramétrique de (\mathcal{P}) .
b) En déduire que si $M \in (\mathcal{P})$, alors $M \in (\mathcal{E})$.
- 2) Démontrons maintenant la réciproque.
 - a) Énoncer cette réciproque. (Pour les questions suivantes, on se placera sous les hypothèses données dans cette réciproque.)
 - b) Expliquer pourquoi l'on peut écrire que :

$$2x - 3y + z - 1 = 2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 0 - 1.$$

- c) Déterminer les coordonnées d'un vecteur non nul \vec{n} tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.
- d) Conclure.

1. Produit scalaire dans l'espace

REMARQUE : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont nécessairement coplanaires :

- s'ils sont colinéaires, alors il existe une infinité de plans contenant \vec{u} et \vec{v} ;
- s'ils ne sont pas colinéaires, ramenons-les à une même origine A et considérons le plan engendré par A, \vec{u} et \vec{v} qui contient donc, par construction, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

DÉFINITION

Le **produit scalaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

REMARQUE : La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l'espace. À savoir :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où \vec{v}_1 est le projeté orthogonal de \vec{v} sur une droite dirigée par \vec{u} .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, où A, B et C sont trois points distincts du plan.

PROPRIÉTÉ : Orthogonalité

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

PREUVE Étant donné la colinéarité de tous les vecteurs directeurs d'une même droite, il suffit de démontrer la propriété en choisissant un vecteur directeur par droite.

Soient (d_1) et (d_2) deux droites, dirigées respectivement par \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . Considérons (Δ_1) et (Δ_2) , les parallèles respectives à (d_1) et (d_2) passant par un même point ; elles sont aussi dirigées respectivement par \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

(d_1) est orthogonale à (d_2) si, par définition, (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires c'est-à-dire si \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux.

DÉFINITION : Repère orthonormé

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

PROPRIÉTÉ : Expression analytique du produit scalaire

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

PREUVE Voir exercice 71 p. 320.

PREUVE

- Pour le premier point, on exprime analytiquement le membre de gauche et le membre de droite puis on compare les expressions obtenues.
- Pour les trois derniers points, on se place dans le plan engendré par \vec{u} et \vec{v} , où l'on utilise les propriétés établies dans le plan en Première S. Plus particulièrement, l'avant-dernier point provient des formules avec les carrés scalaires.

Exemple On se place dans le cube $ABCDEFGH$ comme décrit dans la méthode précédente.

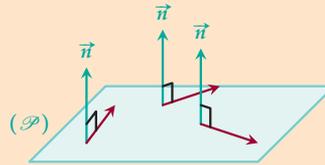
$$\vec{IB} \cdot \vec{ID} = \left(\frac{1}{2}\vec{HF} + \vec{FB} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{FH} + \vec{HD} \right) = \left(\vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{HF} \right) \cdot \left(\vec{FB} - \frac{1}{2}\vec{HF} \right) = \vec{FB}^2 - \frac{1}{4}\vec{HF}^2.$$

Comme $FB = 1$ et que $HF = \sqrt{2}$, on en déduit que $\vec{IB} \cdot \vec{ID} = 1 - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.

2. Vecteur normal à un plan

DÉFINITION : Vecteur normal

Un vecteur \vec{n} est dit normal à un plan (\mathcal{P}) s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans (\mathcal{P}) .



PROPRIÉTÉ

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

PREUVE Soient (d) une droite de vecteur directeur \vec{u} et (\mathcal{P}) un plan.

Par définition, (d) est orthogonale à (\mathcal{P}) si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de (\mathcal{P}) . Cela signifie que \vec{u} est orthogonal à tout vecteur contenu dans (\mathcal{P}) , autrement dit, que \vec{u} est un vecteur normal de (\mathcal{P}) .

PROPRIÉTÉ

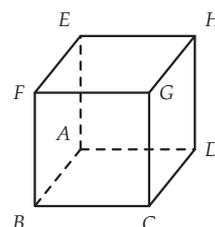
Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

PREUVE Soient (\mathcal{P}) un plan, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul \vec{n} . Montrons que \vec{n} est orthogonal à tout vecteur de (\mathcal{P}) .

Ramenons \vec{u} et \vec{v} à une même origine A : $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est alors un repère de \mathcal{P} et tout vecteur \vec{w} peut s'écrire $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi, $\vec{w} \cdot \vec{n} = \alpha\vec{u} \cdot \vec{n} + \beta\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête $a > 0$.

Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur \vec{FB} est orthogonal aux vecteurs \vec{BA} et \vec{BC} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) . Ainsi, \vec{FB} est un vecteur normal au plan (ABC) . On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC) .





Exemple Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(1; 1; 1) \text{ et } B(-2; 0; 2) \text{ ainsi que les vecteurs } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

\vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan (\mathcal{P}) engendré par A, \vec{u} et \vec{v} .

De plus, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à \vec{u} et \vec{v} donc \overrightarrow{AB} est un vecteur normal au plan (\mathcal{P}) .

MÉTHODE 2 Démontrer une orthogonalité

► Ex. 28 p. 315

Exercice d'application Soit $ABCDEFGH$, un cube d'arête 1.

Démontrons que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH) .

Correction Il suffit de prouver que \overrightarrow{FD} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACH) , par exemple \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{HC} . Démontrer alors que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Calculons le premier produit scalaire en utilisant les propriétés algébriques et le second analytiquement :

- $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

D'une part, et d'après l'exemple précédent, \overrightarrow{FB} est un vecteur normal au plan (ABC) donc il est orthogonal à tout vecteur à ce plan, en particulier à \overrightarrow{AC} . Ainsi, $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

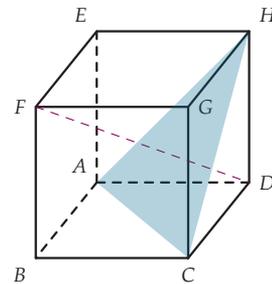
D'autre part, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car $[BD]$ et $[AC]$ sont les diagonales du carré $ABCD$.

On en conclut que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

- En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$,

$$F(1; 0; 1) \text{ et } H(0; 1; 1) \text{ et ainsi, } \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{HC} = -1 + 0 + 1 = 0$.



PROPRIÉTÉ

Soit \vec{n} un vecteur normal à un plan (\mathcal{P}) . Alors, tout vecteur non nul colinéaire à \vec{n} est aussi un vecteur normal de (\mathcal{P}) .

PREUVE Soit \vec{m} un vecteur non nul colinéaire à \vec{n} , c'est-à-dire tel que $\vec{m} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Montrons que \vec{m} est orthogonal à tout vecteur de (\mathcal{P}) .

Soit \vec{w} un vecteur de (\mathcal{P}) . Alors $\vec{w} \cdot \vec{m} = \vec{w} \cdot (k\vec{n}) = k(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0$.

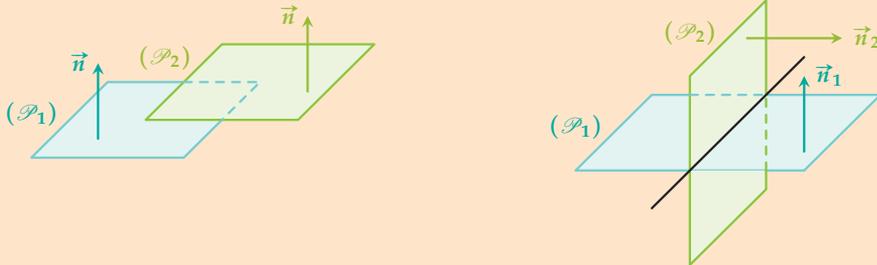
REMARQUE : La projection orthogonale d'un point A sur un plan (\mathcal{P}) est le point H appartenant à (\mathcal{P}) tel que (AH) soit orthogonale à (\mathcal{P}) ou, autrement dit, que \overrightarrow{AH} soit un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

Exemple En reprenant la configuration de la méthode précédente, considérons I le centre de gravité de ACH . Alors $\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HM}$, où M est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3} \left(\overrightarrow{HD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \right)$.

Ainsi $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$. \overrightarrow{FI} est donc aussi un vecteur normal à (ACH) et comme $I \in (ACH)$, on en déduit que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH) .

PROPRIÉTÉ : Parallélisme et perpendicularité de plans

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



PREUVE Pour le premier point, voir exercice 72 p. 320.

Exemple On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

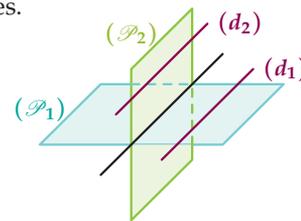
- Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires : les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont donc parallèles.
- Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires : les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont donc sécants, mais $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ne sont pas perpendiculaires.

REMARQUE : Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) , deux plans perpendiculaires.

Si (d_1) est une droite de (\mathcal{P}_1) et (d_2) est une droite de (\mathcal{P}_2) , alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.

Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.

Voir exercice 31 p. 315.



PROPRIÉTÉ

Soient \vec{n} un vecteur non nul, A un point et (\mathcal{P}) le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} . Alors un point M appartient à (\mathcal{P}) si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

PREUVE

- Si M appartient à (\mathcal{P}) alors \overrightarrow{AM} est un vecteur de (\mathcal{P}) et est donc orthogonal à \vec{n} .
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Considérons H le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{P}) . Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$.
 D'une part, \overrightarrow{AH} est contenu dans (\mathcal{P}) , donc \vec{n} et \overrightarrow{AH} sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
 D'autre part, \overrightarrow{HM} et \vec{n} sont colinéaires et donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\vec{n}\| \times HM$ ou $-\|\vec{n}\| \times HM$.
 On en déduit donc que $\|\vec{n}\| \times HM = 0$ et ainsi, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H , il appartient donc à (\mathcal{P}) .



3. Équation cartésienne d'un plan

■ PROPRIÉTÉ : Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Si M appartient à un plan (\mathcal{P}) , alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

$$ax + by + cz + d = 0,$$

avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

- Réciproquement :

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note (\mathcal{P}) .

On dit que (\mathcal{P}) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan

et de plus, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

PREUVE

- Soit (\mathcal{P}) un plan passant par un point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

M appartenant à (\mathcal{P}) , les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

ou encore, en développant :

$$ax + by + cz - \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0 = 0.$$

Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a = \alpha, b = \beta, c = \gamma$ et $d = -\alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0$.

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0; y_0; z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:

- si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
- si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

ce qui peut aussi s'écrire : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

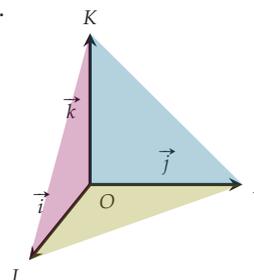
Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité

entre les vecteurs \overrightarrow{AM} et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ($\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$), on en déduit, d'après la propriété précédente,

que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Exemple On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{i} .
- Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{j} .
- Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{k} .



MÉTHODE 3 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) ▶ Ex. 37 p. 316

Dans le cas où le plan (\mathcal{P}) est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

- 1) écrire l'équation de (\mathcal{P}) sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
- 2) déterminer d en utilisant les coordonnées du point A .

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction Les coordonnées du vecteur \vec{n} étant données, le plan (\mathcal{P}) admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer. Le point A appartient à (\mathcal{P}) donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.

Ainsi, une équation cartésienne de (\mathcal{P}) est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.

MÉTHODE 4 Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général) ▶ Ex. 46 p. 317

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan (\mathcal{P}) :

- 1) s'assurer que le plan (\mathcal{P}) est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
- 2) déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à (\mathcal{P}) ;
- 3) en déduire une équation cartésienne de (\mathcal{P}) en se référant à la méthode précédente.

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0; 1; 1)$, $B(-4; 2; 3)$ et $C(4; -1; 1)$.

Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) défini par ces trois points.

Correction On commence par calculer les coordonnées de \vec{AB} et \vec{AC} : $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan (\mathcal{P}) .

On note $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (\mathcal{P}) . Alors $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$, ce qui donne les équations $-4a + b + 2c = 0$ et $4a - 2b = 0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} -8a + 2b + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4a + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = 2a \end{cases}$$

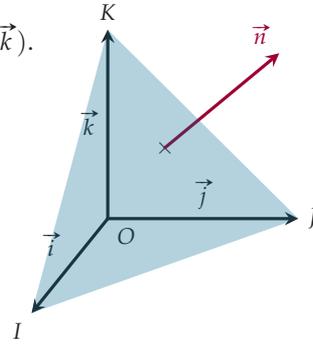
Les coordonnées de \vec{n} sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Avec $a = 1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $(\mathcal{P}) : x + 2y + z + d = 0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.

L'appartenance du point A à (\mathcal{P}) donne $d = -3$ et donc $(\mathcal{P}) : x + 2y + z - 3 = 0$.



Exemple On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans ce repère on considère les points $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;0;1)$. Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



MÉTHODE 5 Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan ▶ Ex. 52 p. 318

Soient (d) une droite dirigée par \vec{u} et (\mathcal{P}) un plan de vecteur normal \vec{n} .

- 1) Tester le parallélisme de (d) et (\mathcal{P}) en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
 - a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à (\mathcal{P}) ;
 - b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et (\mathcal{P}) se coupent en un point M .
- 2) Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et (\mathcal{P}) afin de calculer les coordonnées de M .

Exercice d'application Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère

la droite (d) de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et le plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne $3x + z + 7 = 0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (\mathcal{P}) .

Correction Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de (\mathcal{P}) sont respectivement

$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -3$ donc (d) et (\mathcal{P}) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x; y; z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3x + z + 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3(1 - t) + 5 + 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 \\ x = -4 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ainsi, $M(-4; 10; 5)$.

Exercice d'application Même consigne avec la droite $(d) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et le plan $(\mathcal{P}) : -6x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Correction Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc

(d) et (\mathcal{P}) sont parallèles. De plus, le point $A(1; 2; 3)$ par lequel passe (d) n'appartient pas à (\mathcal{P}) donc (d) et (\mathcal{P}) sont strictement parallèles.

MÉTHODE 6 Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans

► Ex. 66 p. 319

Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .

- 1) Tester le parallélisme de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) en testant la colinéarité de \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .
- 2) Si les plans ne sont pas parallèles :
 - a) écrire le système composé des équations décrivant (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ;
 - b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;
 - c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives $x + 2y + z - 1 = 0$ et $2x - 3y - z + 2 = 0$.

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .

Correction

(\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ils ne sont pas colinéaires donc (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) se coupent selon une droite (d) . Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x + 1 \\ z = 1 - x - 2y = -7x - 1 \end{cases}$$

On peut vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel (ici Xcas en ligne) :

$$\text{linsolve}([x+2y+z-1=0, 2x-3y-z+2=0], [y, z]) \\ [3x + 1, -7x - 1]$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x; 3x + 1; -7x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application

Même consigne avec les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles. Comme les deux équations sont équivalentes, on en déduit que $(\mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2)$.

Produit scalaire dans l'espace

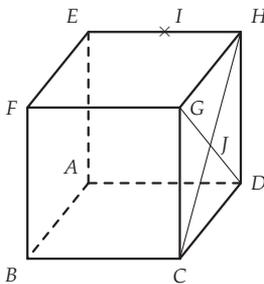
11

ROC

Dans un repère orthonormé de l'espace :

- 1) rappeler la formule de la norme d'un vecteur ;
- 2) énoncer la formule de l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs et la démontrer.

12 On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

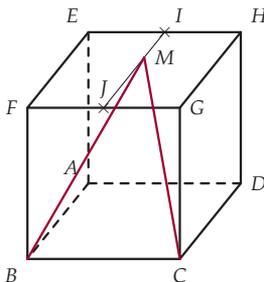


En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1) $\vec{FI} \cdot \vec{FH}$ | 4) $\vec{BJ} \cdot \vec{EJ}$ |
| 2) $\vec{IG} \cdot \vec{IH}$ | 5) $\vec{BI} \cdot \vec{BA}$ |
| 3) $\vec{EJ} \cdot \vec{IF}$ | 6) $\vec{FJ} \cdot \vec{CH}$ |

13 Reprendre l'exercice 12 en se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \frac{1}{a}\vec{AB}, \frac{1}{a}\vec{AD}, \frac{1}{a}\vec{AE})$.

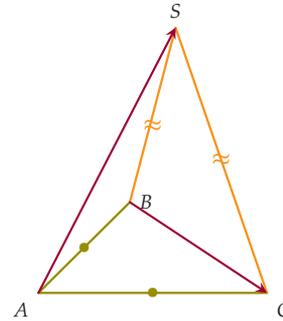
14 On considère le cube suivant, d'arête 1, où I et J sont les milieux respectifs de $[EH]$ et $[FG]$. Soit M un point appartenant à $[IJ]$.



- 1) a) Démontrer que pour $M \neq J$, les triangles MJB et MJC sont rectangles en J .
- b) En déduire que $MB = MC$.
- c) En déduire que $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = MB^2 - \frac{1}{2}$.

2) Déterminer la ou les positions du point M pour que $\vec{MB} \cdot \vec{MC} = 1$.

15 Soit $SABC$ un tétraèdre de tel que les triangles ABC et SBC soient isocèles respectivement en A et S :

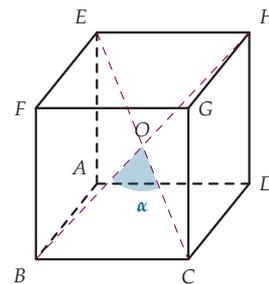


Démontrer que $\vec{AS} \cdot \vec{BC} = 0$.

Calculs d'angles

16 ► MÉTHODE 1 p. 304

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O .



Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.

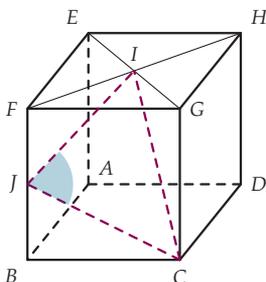
17 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$ et $C(2; 1; 0)$.

Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :

- 1) \widehat{ABC}
- 2) \widehat{BAC}
- 3) \widehat{ACB}



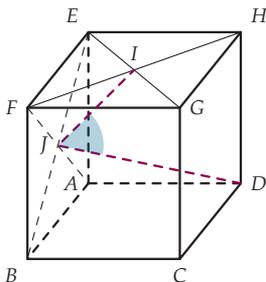
18 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



On cherche à calculer une mesure de l'angle \widehat{CJI} au degré près.

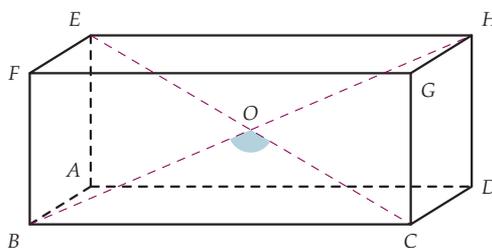
- 1) Méthode géométrique
 - a) Calculer les trois longueurs du triangle IJC .
 - b) En déduire que $\vec{JC} \cdot \vec{JI} = \frac{1}{4}$.
 - c) En déduire une mesure de l'angle \widehat{CJI} .
- 2) Autre méthode géométrique
 - a) Calculer $\vec{JC} \cdot \vec{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les arêtes du cube.
 - b) En déduire une mesure de l'angle \widehat{CJI} .
- 3) Méthode analytique
 - a) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, calculer analytiquement $\vec{JC} \cdot \vec{JI}$.
 - b) En déduire une mesure de l'angle \widehat{CJI} .
- 4) Quelle est la méthode :
 - a) qui demande le moins / le plus de connaissances théoriques ?
 - b) la moins / la plus rapide ?

19 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soit I le centre de la face $EFGH$ et J celui de la face $ABFE$.



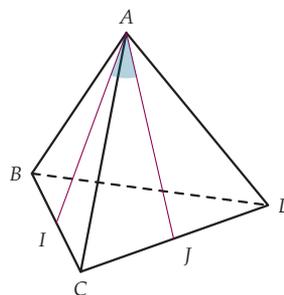
En se plaçant dans un repère orthonormé bien choisi, calculer, au degré près, une mesure de l'angle \widehat{IJD} .

20 On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $AE = 2$. On note O son centre.



En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{5}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$, déterminer une mesure de l'angle \widehat{BOC} au centième de degré près.

21 On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2. Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



- 1) a) Calculer les longueurs AI , AJ et IJ .
- b) En déduire la valeur de $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$.
- 2) En déduire une mesure de l'angle \widehat{IAJ} , au dixième de degré près.

22 Refaire l'exercice **21** en traitant le cas général d'un tétraèdre régulier d'arête $a > 0$.

Orthogonalité

23 ROC
Démontrer que si un vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan (\mathcal{P}) , alors \vec{n} est un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

24 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $\vec{u} \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que \vec{u} et \vec{v} soient orthogonaux.

25 Même exercice que le **28** avec les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} k+1 \\ -k \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

26 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1; 2; 1)$,

$$B(4; 6; 3) \text{ et les vecteurs } \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

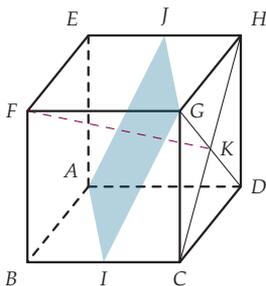
- Démontrer que le point A et les vecteurs \vec{u} et \vec{v} définissent bien un plan.
- Démontrer que \vec{AB} est un vecteur normal à ce plan.

27 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les quatre points $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; 3; 1)$ et $D(-8; 2; -3)$.

- Démontrer que les points A , B et C définissent bien un plan.
- Démontrer que \vec{AD} est un vecteur normal à ce plan.

28 ► **MÉTHODE 2** p. 306

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.

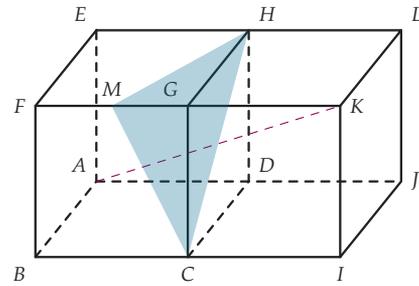


Sans utiliser de repère :

- démontrer que les points A , I , G et J sont coplanaires ;
- démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;
 - démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;
 - en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG) .

29 Reprendre l'exercice **28** en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

30 On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC) .



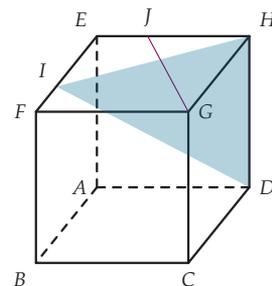
- Démontrer que $\vec{AK} \cdot \vec{CM} = \vec{BK} \cdot \vec{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.
- En suivant cette méthode, calculer $\vec{AK} \cdot \vec{HM}$.
- Conclure.

31 Une erreur courante

Dans cet exercice, on va mettre en évidence de façon analytique la remarque de la page 307. On munit l'espace d'un repère orthonormé.

- Relire cette remarque. À votre avis, quelle est l'erreur courante qui est commise ?
- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, considérons les plans $(\mathcal{P}) : 2x - 3y - z + 4 = 0$ et $(\mathcal{Q}) : x + 2y - 4z - 5 = 0$.
 - Vérifier que (\mathcal{P}) et (\mathcal{Q}) sont bien orthogonaux.
 - Vérifier que $A(1; 1; 3)$ et $B(-1; -1; 5)$ appartiennent à (\mathcal{P}) .
 - Vérifier que $C(1; 6; 2)$ et $D(-3; 0; -2)$ appartiennent à (\mathcal{Q}) .
 - Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? parallèles ?

32 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\vec{EI} = \frac{2}{3}\vec{EF}$ et $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EH}$.



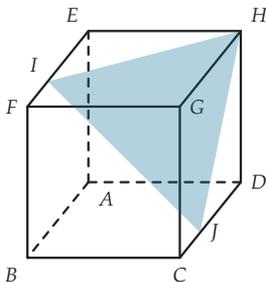
- Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH) .
- Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD) .
- En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID) .



- 4) Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\frac{4}{13}; \frac{7}{13}; 1\right)$ dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

33 On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.

Soient I et J les points tels que $\vec{EI} = \frac{2}{3}\vec{EF}$ et $\vec{DJ} = \frac{2}{3}\vec{DC}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. On considère la droite (Δ) , orthogonale au plan (IHJ) et passant par G . Elle coupe respectivement les plans (ABD) et (ADE) en M et N dont on souhaite déterminer les coordonnées.

- 1) Pourquoi (Δ) est-elle orthogonale aux droites (IH) et (JH) ?
- 2) On note $M(x; y; z)$.
 - a) Déterminer z .
 - b) Utiliser l'orthogonalité des droites (Δ) de (IJ) puis de (Δ) de (IH) afin d'en déduire les valeurs x et de y .
 - c) À quel plan, autre que (ABD) , M appartient-il ?
- 3) En utilisant la même méthode, déterminer les coordonnées du point N .

34 **Distance d'un point à une droite** **INFO**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; -1; 2)$ et $B(1; 1; 1)$ ainsi que le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. On note (d) la droite passant par A et dirigée par \vec{u} .

Soit M un point appartenant à (d) . Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[BM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

La distance d'un point B à une droite (d) est la plus petite distance BM lorsque M parcourt (d) .

- 1) Conjecturer la solution à l'aide d'un logiciel.
- 2) Donner une représentation paramétrique de (d) .
- 3) a) Démontrer que répondre au problème posé revient à déterminer le minimum, ainsi que la valeur pour laquelle il est atteint de :

$$t \mapsto 14t^2 - 22t + 9.$$

- b) Répondre alors au problème posé.
- c) Que peut-on alors remarquer concernant la droite (d) et le vecteur \vec{BM} ?

35 Même consigne qu'à l'exercice **34** avec le point $B(-2; 1; 0)$ et la droite (d) engendrée par le point $A(5; -2; 6)$ et le vecteur $\vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{k}$.

Équation cartésienne d'un plan

36 **ROC**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soient

$\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur non nul et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point.

Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) , admettant \vec{n} pour vecteur normal et passant par A est de la forme $ax + by + cz + d = 0$. On donnera a, b, c et d en fonction des coordonnées de \vec{n} et de A .

37 ▶ **MÉTHODE 3** p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) passant par $A(-1; 2; -1)$ et de vecteur normal

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

38 Même consigne qu'à l'exercice **37** avec :

- 1) $A(1; 4; -5)$ et le vecteur $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$;
- 2) $A(\sqrt{2}; 2; -\sqrt{3})$ et le vecteur $\vec{n} = \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$.

39 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

- 1) $A(2; 1; 0)$ et de vecteur normal \vec{OA} ;
- 2) $A(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2)$ et de vecteur normal \vec{AO} ;
- 3) $A(5; -3; 4)$ et de vecteur normal \vec{k} ;
- 4) $A(2; -1; \sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$.

40 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal \vec{AB} lorsque :

- 1) $A(2; 1; 0)$ et $B(-4; -1; 3)$;
- 2) $A(4; -5; 6)$ et $B(1; -1; 1)$;
- 3) $A(2; -1; 0)$ et $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 1\right)$;
- 4) $A(1; 0; 0)$ et $B(1; 0; 0)$.

41 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{Q}) , parallèle au plan (\mathcal{P}) et passant par le point A lorsque :

- 1) $(\mathcal{P}) : x + y + z - 1 = 0$ et $A(1; 1; 1)$;
- 2) $(\mathcal{P}) : x - 3y + 2z - 4 = 0$ et $A(3; 0; -1)$;
- 3) $(\mathcal{P}) : \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}y - z - 2 = 0$ et $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right)$;
- 4) $(\mathcal{P}) : \sqrt{5}x - 2y - \sqrt{2}z - 4 = 0$ et $A(1; 1; -1)$.

42 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

- 1) $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $A(1; -2; 3)$ et $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$;
- 2) $\vec{OM} \cdot \vec{i} = 3$;
- 3) $\vec{AM} \cdot \vec{j} = -1$ avec $A(1; -2; 3)$;
- 4) $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 5$ avec $A(-2; 4; 1)$ et $\vec{n} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

43 On reprend la figure de l'exercice 28, dans lequel la droite (FK) est orthogonale au plan (AIG) .

- 1) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (AIG) .
- 2) Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(B; \vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BF})$.

44 On reprend la figure de l'exercice 30, dans lequel la droite (AK) est orthogonale au plan (MHC) .

- 1) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (MHC) .
- 2) Même question en se plaçant dans le repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$.

45 On reprend la figure de l'exercice 32, dans lequel la droite (GI) est orthogonale au plan (IHD) .

En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (IHD) .

46 ► MÉTHODE 4 p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois points $A(-1; -1; 1)$, $B(1; 2; -1)$ et $C(0; 1; 1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

47 Même consigne qu'à l'exercice 46 avec :

- 1) $A(5; -4; 1)$, $B(6; 3; 9)$ et $C(-8; 1; 7)$;
- 2) $A(3; 4; 5)$, $B(4; -2; 7)$ et $C(5; -8; 9)$;
- 3) $A(-1; 7; 4)$, $B(-2; 10; 5)$ et $C(3; 6; -1)$.

48 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 - s + 4t \\ y = 2 + 2s - t \\ z = -1 + s + 2t \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

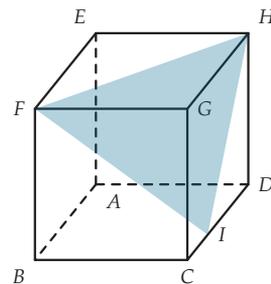
- 1) Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?
- 2) Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

49 Même consigne qu'à l'exercice 48 avec les représentations paramétriques suivantes :

$$1) \begin{cases} x = -5 + 2s - 4t \\ y = 7 - 3s + 6t \\ z = \sqrt{2} - s + 2t \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$2) \begin{cases} x = 4s - t \\ y = -1 - 2s + t \\ z = 5 + s + t \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

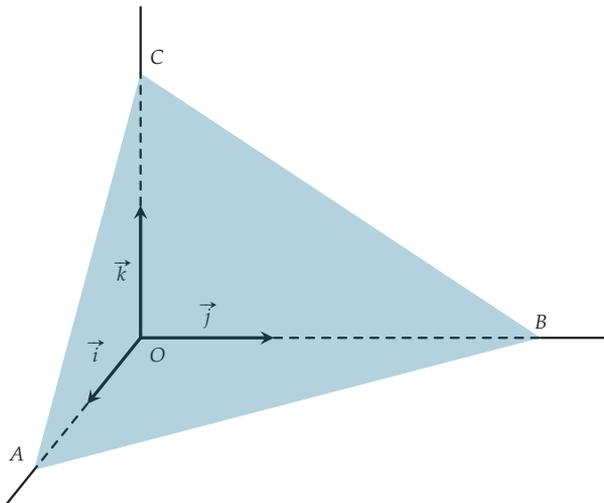
50 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 et le point I tel que $3\vec{DI} = 2\vec{DC}$.



En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, déterminer une équation cartésienne du plan (FHI) .



51 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(\alpha; 0; 0)$, $B(0; \beta; 0)$ et $C(0; 0; \gamma)$ où α , β et γ sont trois réels. On considère, lorsqu'il existe, le plan (ABC) .



- 1) À quelle(s) condition(s) sur α , β et γ le plan (ABC) est-il bien défini?
- 2) Étude des cas particuliers.
 - a) Lorsque $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$, décrire le plan (ABC) .
 - b) Même question lorsque $\beta = 0$ et α et γ non nuls.
 - c) Même question lorsque $\gamma = 0$ et α et β non nuls.
- 3) Étude du cas général où α , β et γ sont tous non nuls. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - 1 = 0.$$

- 4) Expliquer pourquoi l'équation suivante regroupe les différents cas étudiés :

$$\beta\gamma x + \alpha\gamma y + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma = 0.$$

Intersection d'une droite et d'un plan

52 ► MÉTHODE 5 p. 310

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et le plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne :
 $-2x - 3y + z - 6 = 0.$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (\mathcal{P}) .

53 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = 2 - s \\ z = -3 + 5s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathcal{P}) : -x - 5y - z - 6 = 0.$$

54 Même considération qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = 4 - k \\ y = -12 + 5k \\ z = 9 - 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathcal{P}) : 4x + 2y + z - 1 = 0.$$

55 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathcal{P}) : x + y + 3z - 1 = 0.$$

56 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) engendrée par $A(6; -2; -3)$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et le plan $(\mathcal{P}) : -5x - 7y + 10z + 6 = 0.$

57 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(-5; 4; -3)$ et $B(1; -2; 3)$ et le plan $(\mathcal{P}) : x + y + 3z - 1 = 0.$

58 Même instruction qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(1; 2; -1)$ et $B(2; 4; 1)$ et le plan $(\mathcal{P}) : -\frac{4}{5}x - \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z - 2 = 0.$

59 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(2;4;5)$ et $B(-2;0;3)$ et le plan $(\mathcal{P}) : \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$.

60 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec le plan $(\mathcal{P}) : 4x - 6y + 5z - 3 = 0$ et :

- 1) l'axe des abscisses ;
- 2) l'axe des ordonnées ;
- 3) l'axe des cotes.

61 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(2; -5; 3)$ et $B(-2; 4; -8)$ et le plan (\mathcal{P}) passant par $C(4; -1; 2)$ et dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

62 Distance d'un point à un plan

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un plan (\mathcal{P}) et un point A .

Soit M un point appartenant à (\mathcal{P}) . Le but de l'exercice est de déterminer la longueur minimale de $[AM]$ ainsi que la ou les positions du point M rendant cette longueur minimale.

La distance d'un point A à un plan (\mathcal{P}) est la plus petite distance AM lorsque M parcourt (\mathcal{P}) .

- 1) Soit H le projeté orthogonal de A sur (\mathcal{P}) .
 - a) Faire un schéma.
 - b) De quelle droite et de quel plan le point H est-il l'intersection ?
 - c) Démontrer que si M est un point de (\mathcal{P}) différent de H , alors $AM > AH$.
La distance de A à (\mathcal{P}) est donc la distance AH .
- 2) Soit $(\mathcal{P}) : x - 2y - 2z - 31 = 0$ et $A(2; 1; -2)$.
 - a) Donner un vecteur directeur de (AH) .
 - b) En déduire les coordonnées du point H puis la distance de A à (\mathcal{P}) .

63 Reprendre la question **2)** de l'exercice **62** avec le plan $(\mathcal{P}) : -x + 2y + 3z - 15 = 0$ et le point $A(2; 0; 1)$.

64 Reprendre la question **2)** de l'exercice **62** avec le plan $(\mathcal{P}) : 3x - 2y - z - 1 = 0$ et le point $A(3; 1; -2)$.

65 On reprend la figure de l'exercice **50** où une équation cartésienne de (FHI) est $3x + 3y + 2z - 5 = 0$. Déterminer la distance des deux points suivants au plan (FHI) :

- 1) G (on notera K le projeté de G sur (FHI)) ;
- 2) A (on notera L le projeté de A sur (FHI)).

Intersection de deux plans

66 ► MÉTHODE 6 p. 311

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .

67 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

68 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives :

$$x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2x + 2y + 4z + 4 = 0.$$

69 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

70

INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations cartésiennes respectives :

$$x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y - 2z + 1 = 0.$$

- 1) À l'observation des deux équations, semble-t-il évident ou du moins facile de voir quelle(s) inconnue(s) est-il le plus judicieux de choisir en paramètre lors de la résolution du système composé des deux équations ?
- 2) Voici la résolution du système avec « Xcas en ligne », où l'on a choisi à chaque fois un paramètre différent.



$$\text{linsolve}([x-2y+3z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [x, y])$$

$$\left[\frac{1}{7}z + \frac{3}{7}, \frac{11}{7}z + \frac{-16}{7} \right]$$

$$\text{linsolve}([x-2y+3z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [x, z])$$

$$\left[\frac{1}{11}y + \frac{7}{11}, \frac{7}{11}y + \frac{16}{11} \right]$$

$$\text{linsolve}([x-2y+3z-5=0, 3x+y-2z+1=0], [y, z])$$

$$[11x - 7, 7x - 3]$$

Retrouver le résultat le plus simple, en choisissant correctement le paramètre.

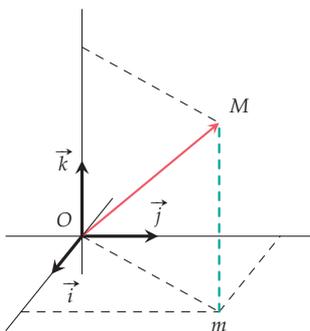
Démonstrations

71 Expression analytique du produit scalaire, p. 303

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace

muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Notons M le point de l'espace tel que $\vec{OM} = \vec{u}$ et m le projeté orthogonal de M sur le plan (\mathcal{P}) engendré par le point O et les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .



- 1) Montrons que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 - a) Pourquoi peut-on appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle OmM ?
 - b) Quelles sont les coordonnées du point m dans le plan (\mathcal{P}) ? En déduire une expression de Om^2 en fonction de x et y .
 - c) Exprimer mM en fonction de z .
 - d) En déduire une expression de OM^2 en fonction de x , y et z et conclure.
- 2) Montrons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
À l'aide d'une des deux formules donnant le produit scalaire en fonction des normes, démontrer l'égalité demandée.

72 Parallélisme de plans, p. 307

Démontrons que deux plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont parallèles si et seulement un vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.

- 1) Supposons que les deux plans ont un même vecteur

normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et démontrons qu'ils sont parallèles.

Notons $ax + by + cz + d = 0$ l'équation de (\mathcal{P}_1) ainsi que $ax + by + cz + \delta = 0$ celle de (\mathcal{P}_2) et intéressons-nous au système composé de ces deux équations, permettant d'obtenir l'intersection des deux plans.

- a) Démontrer que ce système est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ d - \delta = 0 \end{cases}$$

- b) Si $d = \delta$, que peut-on dire de l'ensemble des solutions du système? Conclure.

- c) Même question lorsque $d \neq \delta$.

- 2) Réciproquement, supposons que (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont parallèles et démontrons qu'ils ont même vecteur normal. Le cas où (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont confondus amenant une conclusion évidente, traitons le cas où les deux plans sont strictement parallèles. On note

$\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ deux vecteurs normaux respectifs de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .

- a) En raisonnant par l'absurde, démontrer que $(a; \alpha) \neq (0; 0)$ ou $(b; \beta) \neq (0; 0)$ ou $(c; \gamma) \neq (0; 0)$.

- b) Admettons que $(a; \alpha) \neq (0; 0)$ (la démonstration est identique dans les autres cas) et admettons que $a \neq 0$. En considérant le système composé des équations des deux plans, démontrer que $\alpha \neq 0$.

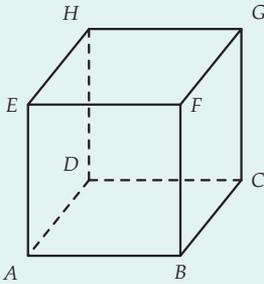
- c) Démontrer que ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ y(\alpha b - a\beta) + z(\alpha c - a\gamma) + (\alpha d - a\delta) = 0 \end{cases}$$

- d) Justifier que $\alpha b - a\beta = 0$ et $\alpha c - a\gamma = 0$.
- e) En déduire que \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires et donner le coefficient de colinéarité.
- f) Conclure.

73 D'après Bac (Pondichéry - 2015)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

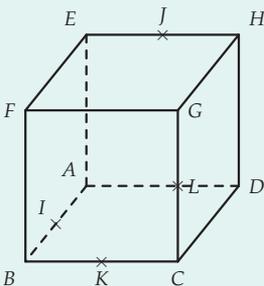


Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points $M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ et $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

- 1) a) Reproduire la figure et placer les points M , N et P .
b) Démontrer que ces points ne sont pas alignés.
- 2) Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M .
- 3) a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur \vec{n} , normal au plan (MNP) .
b) En déduire une équation cartésienne de ce plan.
c) Soit (Δ) la droite passant par F et de vecteur directeur \vec{n} . Donner une équation paramétrique de (Δ) .
d) Soit K le point d'intersection de (MNP) et (Δ) .
Démontrer que $K\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$.
e) En déduire le volume du tétraèdre $FMNP$.

74 D'après Bac (Liban - 2015)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[EH]$, K celui de $[CB]$ et L celui de $[CG]$. On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

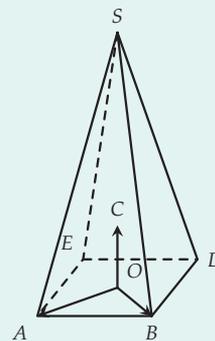


- 1) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .
b) En déduire une équation cartésienne de (IJK) .
- 2) Déterminer une équation paramétrique de (FD) .

- 3) Déterminer les coordonnées du point M d'intersection de (FD) et (IJK) .
- 4) a) Calculer l'aire du triangle IJK .
b) En déduire le volume du tétraèdre $FJKI$.
- 5) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes? Si oui, en quel point?

75 D'après Bac (Amérique du Nord - 2015)

Soit $SABDE$ une pyramide à base carrée $ABDE$ de centre O . On note C le point de l'espace tel que $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ soit un repère orthonormé. Dans ce repère, soit S le point de coordonnées $(0; 0; 3)$.



PARTIE A

- 1) Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire U et démontrer que $U\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$.
- 2) Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SD) . Démontrer que les droites (UV) et (BD) sont parallèles.
Construire V et déterminer ses coordonnées.
- 3) Soit $K\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; 0\right)$.
a) Démontrer que K est le pied de la hauteur issue de U du trapèze $AUVE$.
b) Démontrer que l'aire de ce trapèze est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

PARTIE B

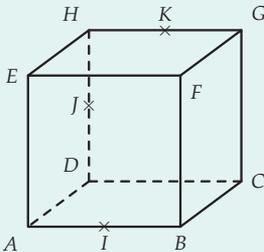
- 1) Démontrer que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
- 2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) , orthogonale au plan (EAU) et passant par S .
- 3) Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite (d) et du plan (EAU) .
- 4) Le plan (EAU) partage la pyramide $SABDE$ en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume?



76 D'après Bac (Polynésie - 2015)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[DH]$ et K celui de $[HG]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- Démontrer que le vecteur \vec{CE} est un vecteur normal du plan (IJK) .
- Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK) .
- Soit M un point de la droite (CE) . Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

77 D'après Bac (Métropole - 2015)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- les points $A(0; 1; -1)$ et $B(-2; 2; -1)$;
- la droite (d) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On note M un point appartenant à (d) , de coordonnées $(-2 + u; 1 + u; -1 - u)$, où u est un réel.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.
 - Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas sécantes.
- Vérifier que le plan (\mathcal{P}) d'équation :

$$x + y - z - 3u = 0$$

est orthogonal à la droite (d) et passe par le point M .

- Montrer que le plan (\mathcal{P}) et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées :

$$(-4 + 6u; 3 - 3u; -1).$$

- Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (d) .
 - Existe-t-il une valeur du réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?
- Exprimer MN^2 en fonction de u .
 - En déduire la valeur de u pour laquelle la distance MN est minimale et donner cette valeur minimale.

78 D'après Bac (Liban - 2014)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.

On se place dans un repère orthonormé de l'espace. On considère le plan (\mathcal{P}) d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite (d) dont un représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On considère aussi les points $A(1; 1; 0)$, $B(3; 0; -1)$ et $C(7; 1; -2)$.

Proposition 1

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 2

Les droites (d) et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3

Les droites (d) et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4

La droite (d) coupe le plan (\mathcal{P}) au point E de coordonnées $(8; -3; -4)$.

Proposition 5

Les plans (\mathcal{P}) et (ABC) sont parallèles.

79 Produit vectoriel

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On cherche les coordonnées

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'un vecteur \vec{n} , orthogonal à \vec{u} et \vec{v} .

1) Démontrer que x, y et z satisfont le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

2) Résoudre ce système en prenant z comme paramètre, c'est-à-dire en exprimant x et y en fonction de z .

3) En déduire, en choisissant judicieusement une valeur de z , que $\vec{n} \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$ est une solution du problème posé.

On dit que ce \vec{n} est le produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} (dans cet ordre) et on note $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

4) Calculer $\vec{v} \wedge \vec{u}$. Que remarque-t-on ?

80 Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ ainsi que le vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$.

On note (d) la droite passant par A et dirigée par \vec{u} .

1) Soit H le projeté orthogonal de B sur (d) .

Démontrer que si M est un point de (d) autre que H alors $BM > BH$.

2) On note $H(x; y; z)$.

a) Après avoir écrit une représentation paramétrique de (d) , et en utilisant le fait que $H \in (d)$, démontrer que la valeur du paramètre permettant d'obtenir les coordonnées du point H est $t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{u}\|^2}$.

b) Il s'agit maintenant de calculer BH . Est-ce une bonne idée ?

3) a) En exprimant astucieusement $\vec{u} \cdot \vec{AB}$, démontrer

$$\text{que } AH = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{AB}|}{\|\vec{u}\|}.$$

b) En déduire une expression de BH .

81 Projection orthogonale sur un plan

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

PARTIE A

Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est le projeté orthogonal de A sur (\mathcal{P}) :

1) (\mathcal{P}) a pour équation $-2x + 3y - z + 8 = 0$;

a) $A(2; 2; -4)$ et $H(4; -1; -3)$;

b) $A(0; 4; -4)$ et $H(2; 1; -3)$.

2) (\mathcal{P}) a pour équation $7x - 5y - 6z + 1 = 0$;

a) $A(-5; 5; 1)$ et $H(9; -5; 13)$;

b) $A(7; -6; 7)$ et $H(0; -1; 1)$.

3) (\mathcal{P}) a pour équation $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{5} = 0$;

a) $A(7; -2; 4)$ et $H\left(4; 0; \frac{5}{2}\right)$;

b) $A\left(-5; 5; -\frac{43}{15}\right)$ et $H\left(1; 1; \frac{2}{15}\right)$.

PARTIE B

Déterminer, dans chacun des cas suivants, les coordonnées de H , projeté orthogonal du point A sur (\mathcal{P}) :

1) $(\mathcal{P}) : x + y + z - 1 = 0$ et $A(1; 1; 1)$;

2) $(\mathcal{P}) : 2x - 3y + 4z - 5 = 0$ et $A(1; 2; 3)$;

3) $(\mathcal{P}) : -x - 2y + 11z + 5 = 0$ et $A(-1; -4; 3)$;

4) $(\mathcal{P}) : ax + by + cz + d = 0$ et $A(\alpha; \beta; \gamma)$.

82 Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et de vecteur normal \vec{n} .

1) Soit H le projeté orthogonal de A sur (\mathcal{P}) .

a) Faire un schéma.

b) Démontrer que si M est un point de (\mathcal{P}) distinct de H , alors $AM > AH$.

2) On pose $\vec{AH} = \lambda \vec{n}$.

a) Démontrer que : $\lambda = -\frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{\|\vec{n}\|^2}$

b) En déduire une expression de AH en fonction des coordonnées de A , des coefficients a, b, c et d et de $\|\vec{n}\|$.

3) Application.

On reprend la figure de l'exercice 50 où une équation cartésienne de (FHI) est $3x + 3y + 2z - 5 = 0$.

Déterminer les distances des points suivants au plan (FHI) :

a) G ; b) A ; c) B ; d) D .



83 Perpendiculaire commune à deux droites INFO

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Soient $A(-3; 4; 5)$ et $B(-4; -1; -1)$ deux points et

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ deux vecteurs.}$$

On considère la droite (d) engendrée par A et \vec{u} ainsi que la droite (Δ) engendrée par B et \vec{v} .

On cherche deux points K et L tels que $K \in (d)$, $L \in (\Delta)$ et (KL) soit perpendiculaire à (d) et (Δ) .

- 1) Représenter la situation dans un logiciel et conjecturer une solution au problème.
- 2) On note $\vec{AK} = k\vec{u}$ et $\vec{BL} = l\vec{v}$, où k et l sont des réels. Déterminer les coordonnées de K , de L puis de \vec{KL} en fonction de k et l .
- 3) Démontrer que (KL) est perpendiculaire à (d) et (Δ) si et seulement si :

$$\begin{cases} 2k - l = -3 \\ -3k + 2l = 4 \end{cases}$$

- 4) Résoudre ce système puis en déduire les coordonnées des points K et L .
- 5) Calculer la distance KL .

84 Plan médiateur

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(4; 2; 2)$ et $B(-9; -10; 2)$.

On note \mathcal{E} l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $MA = MB$.

- 1) Démontrer que \mathcal{E} est le plan d'équation :

$$26x + 24y + 16z = 0.$$

Par définition, on appelle plan médiateur d'un segment $[AB]$ l'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B .

- 2) a) Démontrer que le milieu de $[AB]$ appartient à \mathcal{E} .
- b) Démontrer qu'un vecteur normal à \mathcal{E} est colinéaire à \vec{AB} .
- c) En déduire une caractérisation de \mathcal{E} .

85 Intersection d'une sphère et d'une droite INFO

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; -2; 2)$, $B(1; -5; 4)$ et $C(-1; 3; -1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, s'ils existent, les points d'intersection de la sphère \mathcal{S} de centre A et de rayon 3 avec la droite (BC) .

- 1) a) Représenter \mathcal{S} ainsi que (BC) avec un logiciel de géométrie.
- b) Construire leur intersection.
- 2) a) En procédant de la même façon que pour le cercle en classe de Première S, déterminer une équation de \mathcal{S} .
- b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC) .
- 3) Résoudre le système composé des équations de \mathcal{S} et de (BC) et en déduire la réponse au problème posé.

86 Intersection d'une sphère et d'un plan INFO

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit \mathcal{S} la sphère de centre $A(1; -2; 3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

On considère aussi le plan (\mathcal{P}) passant par O et dirigé par \vec{j} et \vec{k} .

- 1) a) Représenter \mathcal{S} ainsi que de (\mathcal{P}) dans un logiciel de géométrie.
- b) Construire leur intersection. Quelle semble être la nature de cette intersection ?
- 2) a) Déterminer des équations de \mathcal{S} et de (\mathcal{P}) .
- b) Résoudre le système composé des équations de \mathcal{S} et de (\mathcal{P}) et retrouver le résultat conjecturé à la question 1)b).



À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

Calculer un produit scalaire

- ▶ avec la formule utilisant le cosinus
- ▶ avec les projetés
- ▶ avec les propriétés algébriques, en décomposant
- ▶ avec les formules des carrés scalaires
- ▶ avec les coordonnées dans un repère orthonormé

Utiliser un produit scalaire

- ▶ pour calculer la mesure d'un angle
- ▶ pour démontrer une orthogonalité

Déterminer une équation cartésienne d'un plan

- ▶ connaissant un point et un vecteur normal
- ▶ connaissant trois points non alignés

Déterminer l'intersection

- ▶ d'une droite et d'un plan
- ▶ de deux plans



QCM d'auto-évaluation

Des ressources numériques
pour préparer le chapitre sur
manuel.sesamath.net

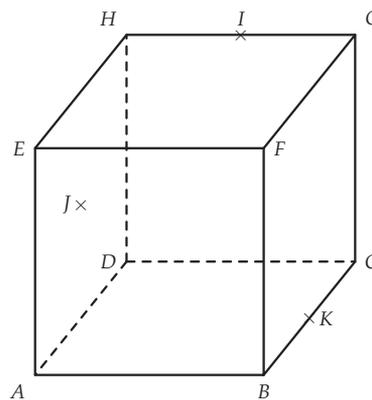


Pour chaque question, plusieurs réponses sont proposées. Déterminer celles qui sont correctes.

Pour les exercices 87 à 105, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 2 ci-contre.

On note I le milieu de $[HG]$, K celui de $[BC]$ et J le centre de la face $ADHE$.

Lorsque cela sera nécessaire, on se placera dans le repère orthonormé $\left(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE}\right)$.



87 Pour calculer le produit scalaire $\vec{EH} \cdot \vec{EI}$, il est préférable d'utiliser :

- a) une projection b) une formule avec les carrés scalaires c) les coordonnées

88 Pour calculer le produit scalaire $\vec{IE} \cdot \vec{IF}$, il est préférable d'utiliser :

- a) la formule avec le cosinus b) une projection c) une formule avec les carrés scalaires

89 Pour calculer le produit scalaire $\vec{BJ} \cdot \vec{BI}$, il est préférable d'utiliser :

- a) une projection b) des décompositions c) les coordonnées

90 Pour calculer le produit scalaire $\vec{BI} \cdot \vec{FG}$, il est préférable d'utiliser :

- a) une projection b) des décompositions c) les coordonnées

103 Un vecteur normal au plan (EKI) est :

a $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

104 Une équation cartésienne du plan (EKI) est :

a $4x - 2y + 3z - 6 = 0$

b $4x - 2y + 3z + 6 = 0$

c $4x - 2y - 3z - 6 = 0$

105 L'intersection du plan (EKI) et du plan (BJI)

a est $(d) : \begin{cases} x = t \\ y = 6 - 4t \\ z = 6 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

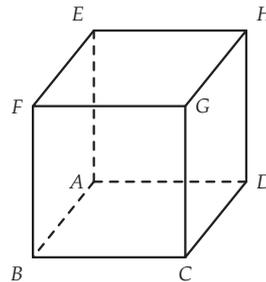
c est le plan $(EKI) = (BJI)$

b est $(d) : \begin{cases} x = 1,5 - 0,25t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

d n'existe pas

Pour les exercices 106 à 110, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 ci-contre.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



106 Un vecteur normal au plan (BGE) a pour coordonnées :

a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

107 Le point d'intersection de (FD) et de plan (BGE) a pour coordonnées :

a $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

b $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

c $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

108 Le triangle BGE est :

a rectangle en G

b isocèle en B

c équilatéral

109 L'aire du triangle BGE est :

a $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b $\sqrt{2}$

c $\frac{\sqrt{6}}{2}$

110 Le volume du tétraèdre $BGED$ est :

a $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

b $\frac{1}{3}$

c $\frac{\sqrt{3}}{2}$



TP 1 Aire minimale

INFO

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(5; 0; 0)$, $B(0; 10; 0)$ et $C(2; 1; 5)$. On considère aussi un point M mobile appartenant au segment $[AB]$.

Le but de ce TP est de déterminer la valeur minimale de l'aire du triangle OMC ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

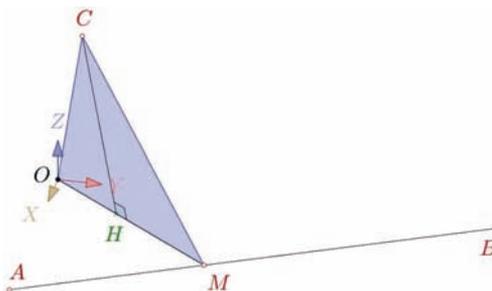
A Étude expérimentale

Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique puis faire afficher l'aire du triangle OMC et conjecturer une réponse au problème posé.

Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) en utilisant le point A et un vecteur directeur le plus simple possible (on notera t le paramètre).

B Étude théorique

Notons H la projection orthogonale de C sur (OM) .



- 1) Déterminer une équation paramétrique de la droite (AB) (on notera t le paramètre) puis en déduire les coordonnées de M en fonction de t .
- 2) a) Déterminer une équation paramétrique la plus simple possible de la droite (OM) (on notera s le paramètre).
b) En déduire que les coordonnées du point H sont :

$$H((5-t)s; 2ts; 0) \quad \text{où} \quad s = \frac{2}{t^2 - 2t + 5}$$

- 3) On note $f : t \mapsto \mathcal{A}_{OMC}$.
a) Après avoir exprimé successivement la base OM et la hauteur CH du triangle OMC en fonction de t , déterminer une expression de $f(t)$.
On pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel.
b) Établir le tableau de variation de f .
c) En déduire les coordonnées des points H et M minimisant l'aire du triangle OMC , ainsi que cette aire.

C Prolongement et questions ouvertes

- 1) a) Démontrer que la valeur de t rendant minimale l'aire de OMC est aussi la valeur de t rendant minimales chacune des distances CH et OM .
b) Cette situation est-elle toujours vraie? Argumenter.
- 2) a) Dans le logiciel de géométrie dynamique, faire afficher le lieu de H lorsque M parcourt (AB) . Quelle conjecture peut-on faire?
b) La démontrer.

(d'après l'IREM de Lyon)

TP 2 Symétrie orthogonale par rapport à un plan

INFO

Dans l'espace, on appelle symétrie orthogonale par rapport au plan (\mathcal{P}) la transformation qui laisse invariant tout point de (\mathcal{P}) et qui à tout point M n'appartenant pas à (\mathcal{P}) , associe le point M' tel que (\mathcal{P}) soit le plan médiateur du segment $[MM']$.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère un plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et un point $M(x_M; y_M; z_M)$.

On souhaite déterminer les coordonnées $(X; Y; Z)$ du point M' , symétrique de M par rapport à (\mathcal{P}) .

A Mise en équation et résolution

1) a) Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et du plan (\mathcal{P}) ?

b) Traduire vectoriellement cette information.

2) On note H l'intersection de (\mathcal{P}) et (MM') .

Donner une expression des coordonnées de H en fonction de celles de M et de M' .

3) a) En déduire que X, Y et Z sont solutions du système suivant, où k est une inconnue à préciser :

$$\begin{cases} X & = ka + x_M \\ Y & = kb + y_M \\ Z & = kc + z_M \\ a(X + x_M) + b(Y + y_M) + c(Z + z_M) + 2d & = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre ce système à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

B Expérimentation avec un logiciel

Soient $M(1; -1; 3)$ un point de l'espace et (\mathcal{P}) le plan engendré par les points $A(2; -2; 1)$, $B(-1; -2; 3)$ et $C(1; 1; 1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) .

2) a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, placer les points A, B, C et visualiser (\mathcal{P}) .

b) Placer M puis M' en lui donnant les coordonnées trouvées dans la partie 1.

Vérifier que la construction est cohérente.

TP 3 Plan tangent à une surface

INFO

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la surface, notée (\mathcal{S}) , d'équation $z = x^2 + y^2$. On souhaite déterminer l'équation cartésienne du plan (\mathcal{T}) , tangent à (\mathcal{S}) au point $A(1; 1; 2)$.

- 1) Vérifier que A appartient bien à (\mathcal{S}) .
- 2) On se place dans le plan (\mathcal{P}) d'équation $x = 1$.
 - a) Peut-on donner une équation de ce plan sous la forme $z = \dots$? Si non, donner une représentation paramétrique de ce plan.
 - b) On note (\mathcal{C}) la courbe intersection de (\mathcal{P}) et (\mathcal{S}) . Démontrer qu'une équation de (\mathcal{C}) dans le plan (\mathcal{P}) est $z = 1 + y^2$.
 - c) Expliquer pourquoi, dans l'espace, $z = 1 + y^2$ n'est pas une équation de (\mathcal{C}) . Déterminer une équation paramétrique de (\mathcal{C}) .
 - d) Voici une capture d'écran du logiciel Maxima, permettant de représenter graphiquement (\mathcal{S}) , (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) :

```
(%i1) load(draw)$
      draw3d(color = blue,
            explicit(x^2+y^2, x,-3,3,y,-3,3),
            color = brown,
            parametric_surface(1,u,v, u,-3,3, v,-3,18),
            color = green,
            line_width = 5,
            parametric(1,t,1+t^2, t,-3,3)
      );
```

Recopier et expliquer chacune des intructions.

- e) Démontrer que dans (\mathcal{P}) , une équation de (d_x) , tangente à (\mathcal{C}) au point A , est $z = 2y$.
- f) Donner une représentation paramétrique de (d_x) et la représenter avec le logiciel.
- 3) Reprendre le raisonnement précédant dans le plan (\mathcal{Q}) d'équation $y = 1$. On notera (d_y) la tangente obtenue.
 - 4) a) Démontrer que le point A et les deux droites (d_x) et (d_y) définissent bien un plan.
 - b) Donner une équation cartésienne de ce plan, sous la forme $z = \dots$
 - c) Représenter ce plan ainsi que (\mathcal{S}) et observer que ce plan est bien le plan (\mathcal{T}) recherché.

Récréation, énigmes

- 1) En chimie, certaines molécules présentent une géométrie tétraédrique.
 - a) Citer quelques molécules de ce type.
 - b) Quel est l'angle formé par l'atome central et deux atomes périphériques?
- 2) La cristallographie est la science qui a pour objet l'étude des substances cristallines à l'échelle atomique.
 - a) Citer quelques exemples de cristaux et donner leur forme géométrique.
 - b) Quels sont les angles dièdres de ces polyèdres?
- 3) Le ballon de football a pour modèle géométrique l'icosaèdre tronqué. Quels sont les angles dièdres entre les deux types de faces?

