Nombres premiers – Exercices corrigés

Généralité sur les nombres premiers

13 ► MÉTHODE 1 p. 55

Sans calculatrice, à l'aide de divisions successives et du critère d'arrêt, déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

97 ; 117 ; 271 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719

14 Montrer que 271 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée.

Corrigé

14 $16 < \sqrt{271} < 17$. On teste tous les nombres premiers inférieurs à 17 soit : $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Ils ne divisent pas 271, d'après le test de primalité, 271 est premier.

16 p est premier et $p \geqslant 5$.

1) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 3.
2) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.
3) En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Corrigé

1) $p \geqslant 5$ premier donc $p \neq 3$ et donc p n'est pas divisible par 3 ($p \not\equiv 0\ (3)$).
   - Si $p \equiv 1\ (3) \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 1^2 - 1 \equiv 0\ (3)$
   - Si $p \equiv 2\ (3) \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 2^2 - 1 \equiv 3 \equiv 0\ (3)$
2) $p \geqslant 5$ premier donc p est impair et
   $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$
   $p - 1$ et $p + 1$ sont deux nombres pairs consécutifs donc l'un des deux est divisible par 4. Le produit $(p-1)(p+1)$ est donc divisible par 8.
   D'où $p^2 - 1$ est multiple de 8.
3) 3 et 8 divise $p^2 - 1$, comme 3 et 8 sont premiers entre eux, d'après le corollaire du th. de Gauss, $3 \times 8 = 24$ divise $p^2 - 1$

17 Soit p soit un nombre premier tel que $p > 3$.

1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2) Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

Corrigé

1) $p > 3$ premier, donc p est impair non divisible par 3. Comme 12 est pair et divisible par 3, les restes possibles de p par 12 sont : 1, 5, 7 et 11.
2) Faisons un tableau de congruence modulo 12 :

$p \equiv$	1	5	7	11
$p^2 - 11 \equiv$	0	0	0	0

   Par exemple : $p \equiv 7\ (12) \Rightarrow$
   $p^2 + 11 \equiv 49 + 11 \equiv 60 \equiv 0\ (12)$
   $p^2 + 11$ est donc divisible par 12

23 Est-il possible de trouver un nombre premier p tel que $p + 1\,000$ et $p + 2\,000$ soient aussi premiers ?

Aide : On pourra raisonner modulo 3, c'est-à-dire que l'on analysera successivement les cas $p \equiv 0$, $p \equiv 1$ et $p \equiv 2$ modulo 3.

Corrigé

Soit un nombre premier p. On a 3 éventualités

- $p \equiv 0\ (3)$.
  $p = 3$ car p est premier. On a :
  $p + 1000 = 1003 = 17 \times 59$, $p + 1000$ n'est donc pas premier
- $p \equiv 1\ (3)$. On a :
  $p + 2000 \equiv 2001\ (3)$ et $2001 = 3 \times 667$ donc
  $p + 2000 \equiv 0\ (3)$
  $p + 2000 > 3$ est donc divisible par 3 donc non premier
- $p \equiv 2\ (3)$. On a :
  $p + 1000 \equiv 1002\ (3)$ et $1002 = 3 \times 334$ donc
  $p + 1000 \equiv 0\ (3)$
  $p + 1000 > 3$ est donc divisible par 3 donc non premier

Conclusion : il est impossible de trouver un nombre premier p pour que $p + 1000$ et $p + 2000$ le soit également.

24 Nombres de Mersenne

On appelle nombres de Mersenne, les nombres M_n de la forme : $M_n = 2^n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer les six premiers nombres de Mersenne. Quels sont ceux qui sont des nombres premiers ?

2) Soit n un entier naturel non nul et a un entier. Montrer la factorisation standard :
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$.

3) En déduire que, si d est un diviseur de n, M_n est divisible par $2^d - 1$.

4) Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ? (On pourra calculer M_{11}.)

5) Soit a et n deux entiers tels que : $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Corrigé

1) Calculons les 6 premiers nombres de Mersenne :

$M_1 = 2 - 1 = 1 \quad , \quad M_2 = 4 - 1 = 3$

$M_3 = 8 - 1 = 7 \quad , \quad M_4 = 16 - 1 = 15$

$M_5 = 32 - 1 = 31 \quad , \quad M_6 = 64 - 1 = 63$

On constate que pour les n égaux à 2, 3, 5, les nombres de Mersenne sont premiers.

2) Avec la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison a et de premier terme 1, on montre que :
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$

3) $n = dq$ avec $q > 1$

Factorisons alors M_n :

$$\begin{aligned} M_n &= 2^n - 1 \\ &= (2^d)^q - 1 \qquad \text{car } n = dq \\ &= (2^d - 1)[(2^d)^{q-1} + (2^d)^{q-2} + \cdots + 2^d + 1] \end{aligned}$$

donc $2^d - 1$ est un diviseur propre de M_n et donc M_n n'est pas premier.

4) Par la contraposée :

Si n n'est pas premier alors M_n ne l'est pas non plus.

La réciproque est fausse, ce qui met à mal une formule permettant de trouver un nombre premier aussi grand que l'on souhaite.

En effet si $n = 11$ alors $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2\,047$ or $2\,047 = 23 \times 89$.

5) Par la contraposée :

Si $a \geqslant 3$ ou n non premier alors $a^n - 1$ non premier.

- Si $n \geqslant 3$,
  $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$
  $a^n - 1$ est divisible par $a - 1 \geqslant 2$ donc non premier.
- Si n non premier, d'après 3) divisible par $2^d - 1$

Décomposition. Nombre de diviseurs

25 ► MÉTHODE 2 p. 58

Décomposer 960 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 960 ?

26 Décomposer en produit de facteurs premiers 221 122. Quel est le nombre de diviseurs de 221 122 ?

Corrigé

26 $221\,122 = 2 \times 11 \times 19 \times 23^2$.

$2^3 \times 3 = 24$ diviseurs.

27 ► MÉTHODE 3 p. 59

1) Déterminer le PGCD de 2 650 et 1 272 :

a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;

b) à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 650 et 1 272.

2) Quelle est la méthode la plus efficace ? Pourquoi ?

29

1) Déterminer le PGCD de 428 904 et 306 360 :

a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;

b) à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de 428 904 et 306 360.

2) Quelle est la méthode la plus efficace ? Pourquoi ?

Corrigé

29 On pose $D = \text{PGCD}(428\,904 \,;\, 306\,360)$.

1) Par l'algorithme d'Euclide :

$$\left.\begin{aligned} 428\,904 &= 306\,360 \times 1 + 122\,544 \\ 306\,360 &= 122\,544 \times 2 + 61\,272 \\ 122\,544 &= 61\,272 \times 2 \end{aligned}\right\} \quad D = 61\,272$$

2) Par la décomposition en facteurs premiers :

$428\,904 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 23 \times 37$

$306\,360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 23 \times 37$

Donc $D = 2^3 \times 3^2 \times 23 \times 37 = 61\,272$

3) La méthode la plus efficace est l'algorithme d'Euclide qui est beaucoup plus économe en opérations.

30 ► MÉTHODE 4 p. 60

Décomposer 792 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 792 ? À l'aide d'un tableau ou d'un arbre déterminer tous les diviseurs de 792.

31 Décomposer 8 316 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseur de 8 316 ?
À l'aide d'un tableau ou d'un arbre déterminer tous les diviseurs de 8 316.

Corrigé

31 N : nombre de diviseur de 8 316.

$8\,316 = 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11$

$N = 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 48$

On retrouve les diviseurs à l'aide d'un arbre à 4 étages :

$D_{8\,316} = \{1;2;3;4;6;7;9;11;12;14;18;21;22;27;28;33;36;42;44;54;63;66;77;84;99;108;126;132;154;189;198;231;252;297;308;378;396;462;594;693;756;924;1\,188;1\,386;2\,079;2\,772;4\,158;8\,316\}$

32 Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56.

Corrigé

32 Soit a le nombre cherché. a est un nombre de 3 chiffres donc $100 \leqslant a < 1000$

a est divisible par 56 donc $a = 56k = 2^3 \times 7 \times k, k \in \mathbb{N}$

a est un carré parfait donc toutes les puissances dans sa décomposition en facteurs premiers sont paires donc a est de la forme $a = 2^4 \times 7^2 \times k'^2 = 784\,k'^2$

Comme a est inférieur à 1000, on a $k' = 1$ donc $a = 784 = 28^2$

34 Trouver tous les diviseurs de 84, puis résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x(x+1)(2x+1) = 84$.

Corrigé

34 $D_{84} = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 7;\ 12;\ 14;\ 21;\ 28;\ 42;\ 84\}$

- **Analyse** : Soit x une solution de l'équation. D'après la factorisation, x et $x+1$ sont des diviseurs de 84. Les solutions de l'équation sont donc à chercher parmi les entiers consécutifs diviseurs de 84.
  Les valeurs de x possibles sont donc : 1, 2, 3 et 6.
- **Synthèse** : On vérifie parmi ces valeurs celles qui sont solutions de l'équation :

x	1	2	3	6
$x(x+1)(2x+1)$	6	30	84	546

L'équation admet une unique solution : $x = 3$

35 Le produit de deux entiers naturels a et b $(a < b)$ est 11 340. On note d leur PGCD.

1) a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?

b) Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$?

2) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.

a) Démontrer que $d = 18$.

b) En déduire a et b.

Corrigé

1) a) Soit $d = \text{PGCD}(a,b)$, on a alors $a = da'$ et $b = db'$ avec $\text{PGCD}(a',b') = 1$, d'où $ab = da' \times db' = d^2a'b'$, d^2 divise donc $ab = 11\,340$.

b) On décompose $11\,340 = 2^2 \times 3^4 \times 5 \times 7$
On cherche un carré diviseur de 11 340. Les facteurs premiers possibles doivent avoir une puissance supérieure à 2. Les seules facteurs premiers possibles sont donc 2 et 3. On donc
$d = 2^\alpha \times 3^\beta \quad \Rightarrow \quad d^2 = 2^{2\alpha} \times 3^{2\beta}$.
En identifiant à la décomposition de 11 340, on a :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2$$

2) a) Si a et b ont 6 diviseurs communs, d a alors 6 diviseurs donc : $(\alpha+1)(\beta+1) = 6$
Compte tenu des encadrements de α et β, on a :

$$\alpha = 1 \text{ et } \beta = 2 \quad \Rightarrow \quad d = 2^1 \times 3^2 = 18$$

b) a est un multiple de 5, $a = 5d \Rightarrow b = 7d$ ou $a = 5d \times 7 \Rightarrow b = d$. Comme $a < b$, la seule solution est alors :
$a = 5d = 5 \times 18 = 90$ et $b = 7d = 7 \times 18 = 126$

36 ► MÉTHODE 5 p. 61

α et β sont deux entiers naturels et $n = 2^\alpha 3^\beta$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.

2) En déduire n.

39 Un détaillant de matériel audiovisuel effectue trois remises successives sur un article qui coûtait 300 € et qu'il vend 222,87 €.
Quels sont les pourcentages (nombres entiers) des trois remises ?