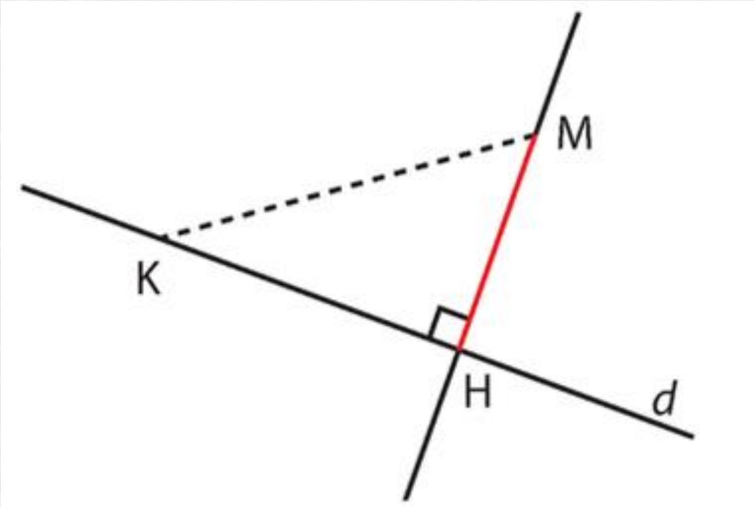
Repérage et Problèmes de géométrie

I. Géométrie sans repère

Définition - Projeté orthogonal

On appelle projeté orthogonal d'un point M sur une droite d avec M extérieur à cette droite,

le point H intersection de la droite d et de la perpendiculaire à la droite d passant par M.



Remarque

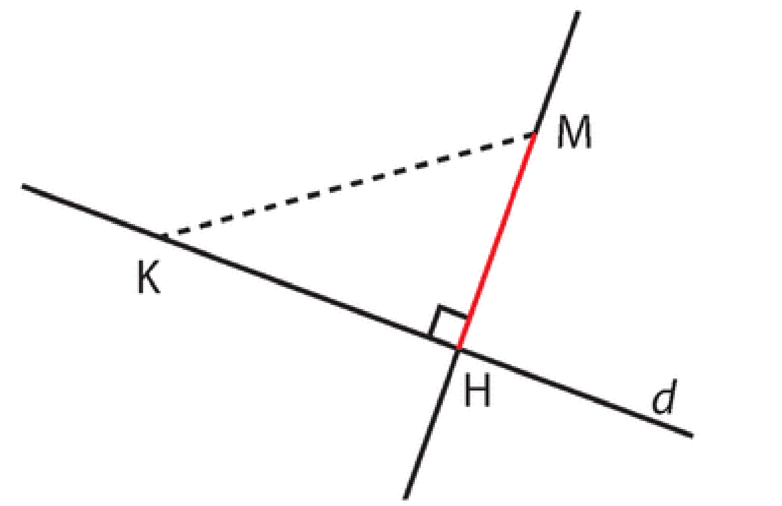
Si le point M appartient à la droite d alors il est son propre projeté orthogonal.

Définition - Distance d'un point à une droite

On appelle distance d'un point M à une droite d

la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur la droite d.

Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point de la droite.



Démonstration

Soit K un point quelconque de la droite d distinct de H.

Le triangle MHK est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$MK^2 = MH^2 + HK^2.$$

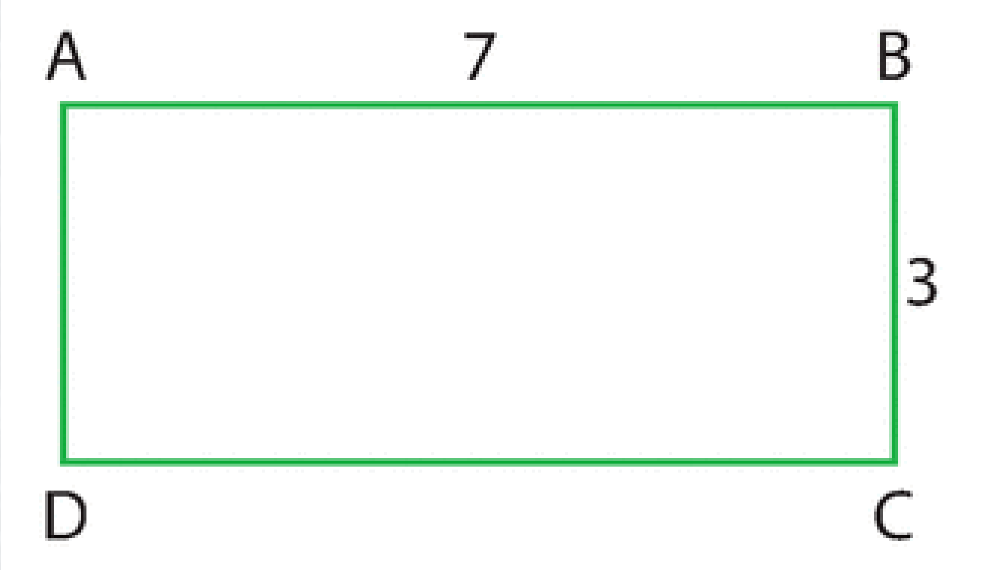
Par conséquent, comme $HK \neq 0$: $MK^2 > MH^2$

on en déduit que quel que soit le point K de la droite d, $MK > MH$,

ce qui montre que la plus courte distance est bien MH.

Exemple

ABCD est un rectangle de longueur AB = 7 et de largeur BC = 3.



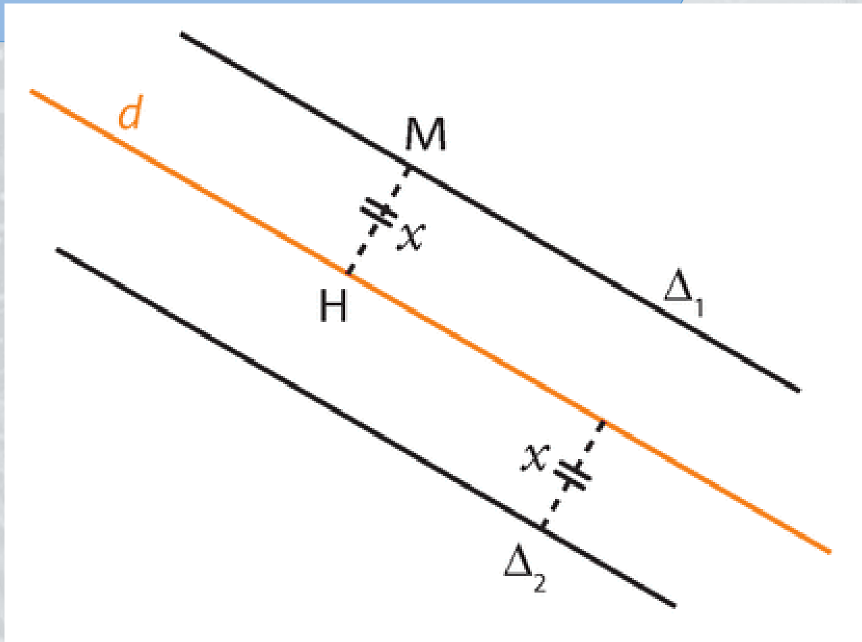
Le projeté orthogonal du point D sur la droite (BC) est le point C

donc la distance du point D à la droite (BC) vaut

DC = AB = 7.

Propriété - Ensemble des points à une distance donnée d'une droite

L'ensemble des points à une distance fixée x d'une droite donnée d est composé des deux droites Δ_1 et Δ_2 parallèles à d situées de part et d'autre de d.



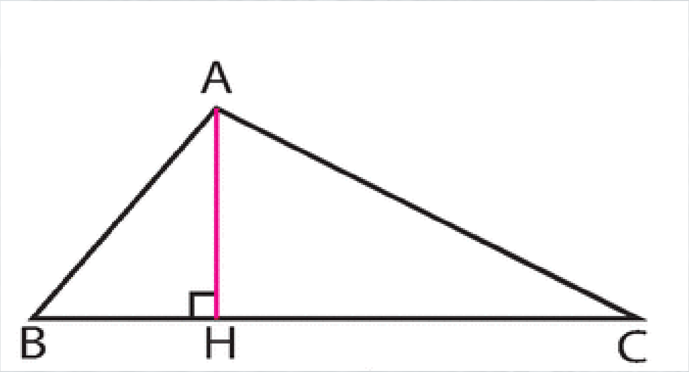
Remarque

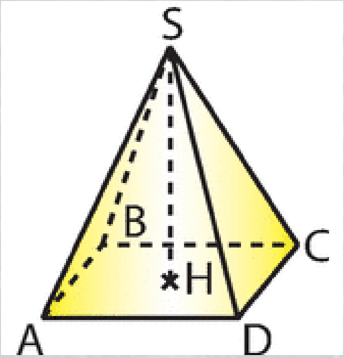
La droite Δ_1 est également la droite perpendiculaire à (MH) passant par M où H est le projeté orthogonal de M sur d.

Définition - Hauteur dans un triangle

Dans un triangle ABC, la droite qui passe par le sommet A et qui est perpendiculaire au côté opposé [BC] s'appelle la hauteur issue de A.

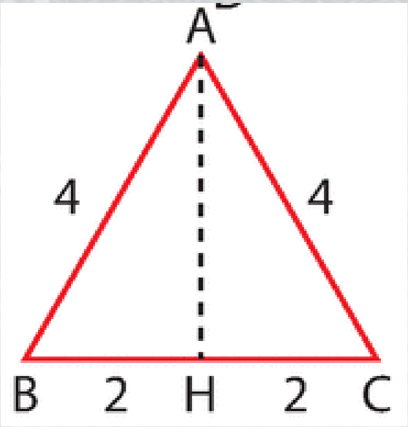
La longueur AH est la distance du point A à la droite (BC).





Remarque

De la même manière, la hauteur SH d'une pyramide est la plus courte distance entre son sommet et sa base.



Exemple

ABC est un triangle équilatéral de côté 4.

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC) est le milieu du segment [BC] car A est sur la médiatrice de ce segment.

Donc la distance de A à la droite (BC) est la longueur AH.

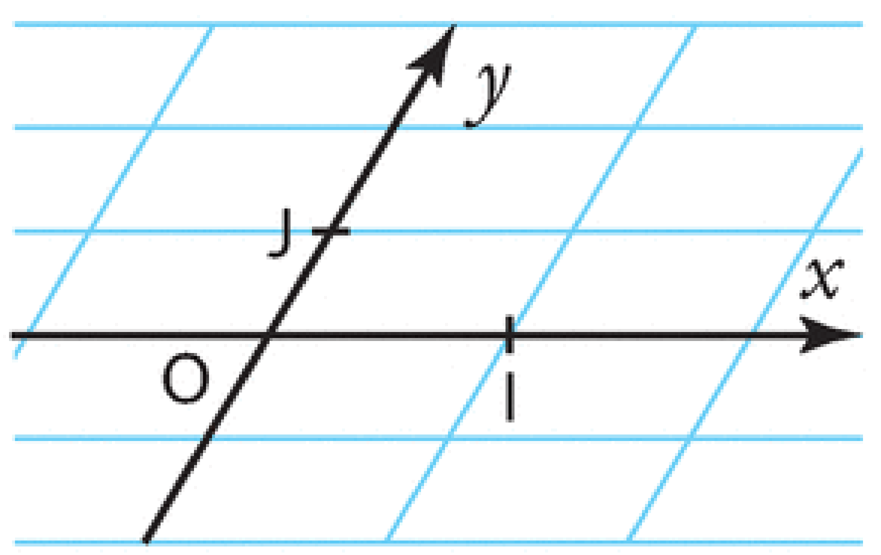
Pour la calculer on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle AHB qui donne :

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 4^2 - 2^2 = 12$ donc $AH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

II. Géométrie avec repère

Définition - Repère

Étant donné trois points distincts O, I et J non alignés, le repère noté (O ; I, J) est le repère d'origine O ayant pour axe des abscisses (OI), pour axe des ordonnées (OJ) et tel que I et J sont les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1).



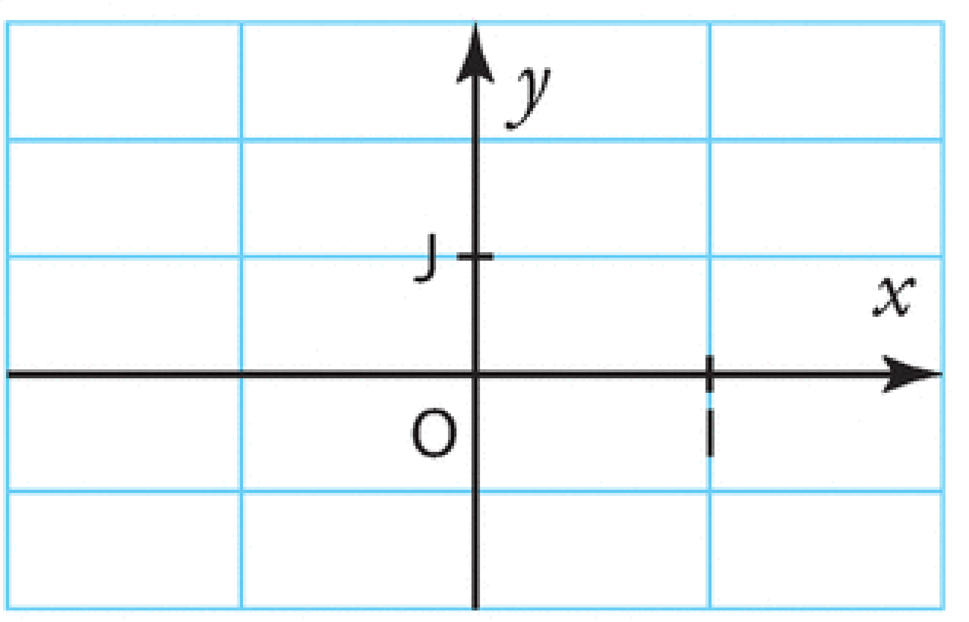
Remarque

Les deux cas particuliers qui sont le plus souvent utilisés sont les suivants.

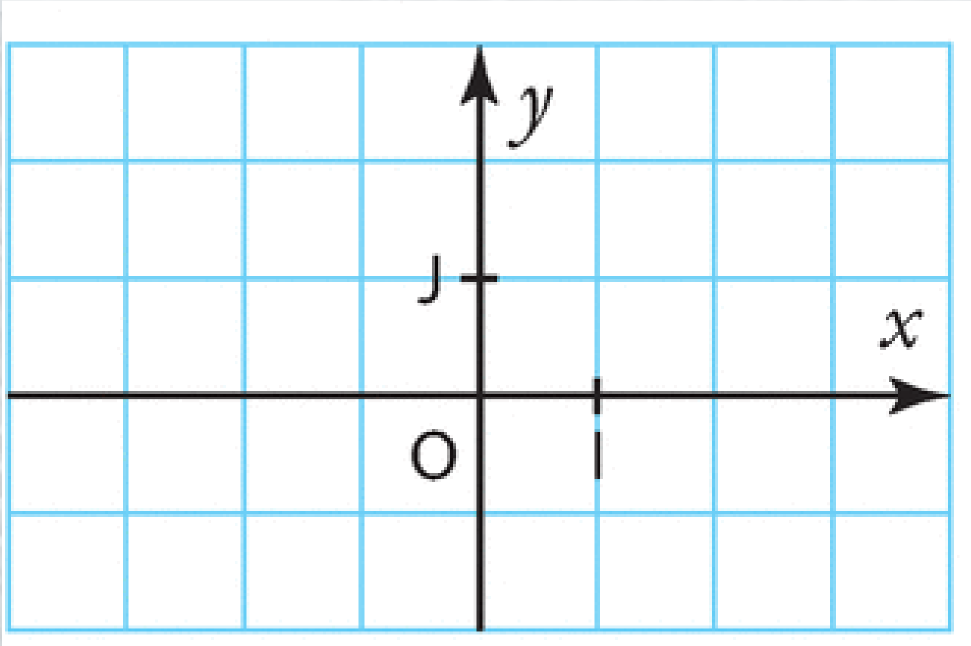
Remarque

Les deux cas particuliers qui sont le plus souvent utilisés sont les suivants.

• Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère est orthogonal.



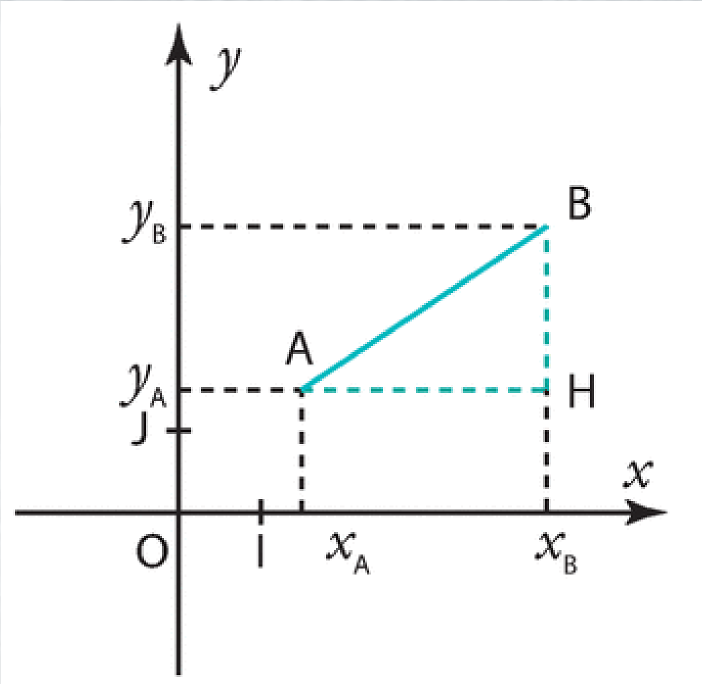
• Si le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O, le repère est orthonormé (ou orthonormal)



Définition - Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, la longueur AB du segment $[AB]$ où $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ est donnée par la relation :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Démonstration

On considère le point H tel que ses coordonnées sont $H(x_B\,;y_A)$,
le triangle ABH est donc rectangle en H et le théorème de Pythagore nous donne :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Exemple

Soit $A(3\,;\,-2)$ et $B(-1\,;-4)$ dans un repère orthonormé alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \text{soit} \quad AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4-(-2))^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Propriété - Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère quelconque, le milieu d'un segment [AB] où $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

Exemple

Soit $A(3\,;\,-1)$ et $B(-2\,;\,5)$ alors le milieu du segment [AB] a pour coordonnées:

$$\left(\frac{3+(-2)}{2}\,;\frac{-1+5}{2}\right) \text{ soit } \left(\frac{1}{2}\,;2\right)$$