Première C	Évaluation de mathématiques n°3 Probabilités (1h30 mn)	Mardi 29 octobre 2019

Corrigé

Exercice 1 (Niveau 1)

2 points

Soit A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}3$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.

Par indépendance de A et B, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$.

2. À l'aide de la formule du crible, en déduire $P(A \cup B)$.

On sait que $P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc

$$P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}65$$

Exercice 2 (Niveau 1)

5 points

Pour chaque question, choisir la ou les bonne(s) réponses sans chercher à justifier.

Il sera attribué 1 pt par réponse juste et $-0{,}5$ par mauvaise réponse et 0 sinon.

Soit A et B deux évènements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $P(A) = 0{,}15$ et $P(B) = 0{,}6$.

1. Si de plus, $P_B(A) = \frac{1}{4}$, alors on peut affirmer que :

a) A et B sont indépendants	***b)*** $P(A \cap B) = 0{,}15$	***c)*** $P_A(B) = 1$	***d)*** $P(A \cap B) = 0{,}9$

Réponses justes : ***b)*** et ***c)*** .

En effet, si de plus on a $P_B(A) = \frac{1}{4}$, on a $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$ donc $P(A \cap B) = 0{,}6 \times \frac{1}{4} = 0{,}15$ et alors $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}15} = 1$.

En revanche, ***a)*** et ***d)*** sont fausses car $P_A(B) \neq P(A)$ donc A et B ne sont pas indépendants, et $P(A \cap B) = 0{,}15 \neq 0{,}9$.

2. Si de plus, $P(A \cup B) = 1$, alors on peut affirmer que :

a) A et B sont indépendants	***b)*** $\{A, B\}$ est une partition de l'univers	***c)*** $P(A) + P(B) = 1$	***d)*** Cette situation est impossible

Réponse juste : ***d)***

En effet, d'après la formule du crible, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc comme $P(A \cap B) \geq 0$ on a $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ donc $P(A \cup B) \leq 0{,}75 < 1$

Cela exclut les autres réponses proposées.

3. Si de plus, A et B sont indépendants, alors on peut affirmer que :

a) $P_A(B) = \frac{3}{5}$	***b)*** $P(A \cap B) = 0$	***c)*** $P(A \cap B) = \frac{3}{4}$	***d)*** $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{50}$

Réponses justes : ***a)*** et ***d)*** .

En effet, si de plus A et B sont indépendants, alors on sait que $P_A(B) = P(B)$ et on a $0{,}6 = \frac{3}{5}$.

Par ailleurs, A et B étant indépendants, on sait que A et $\bar{B}$ le sont aussi, donc

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = 0{,}15 \times (1 - 0{,}6) = 0{,}06 = \frac{3}{50}$$

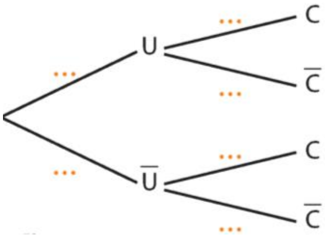
En revanche, ***b)*** et ***c)*** sont fausses : comme $P(A \cap B) \leq P(A)$ et $P(A) = 0{,}15$, il est impossible que $P(A \cap B) = \frac{3}{4}$ vu que A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(B) \times P(A) = 0{,}15 \times 0{,}6 = 0{,}09 \neq 0$.

Exercice 3 (Niveau 1)

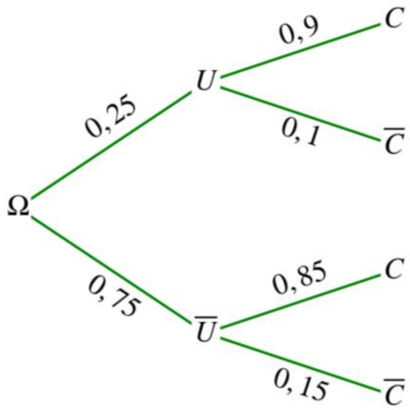
4 points

Émilie a une entreprise de plomberie.
75 % de ses interventions sont programmées, le reste est « en urgence ». Pour les interventions programmées, elle utilise son chalumeau 85 % du temps contre 90 % pour les interventions d'urgence.
Émilie part chez un client, on considère les événements :

- U : « L'intervention est en urgence. »
- C : « Émilie va devoir utiliser son chalumeau. »



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.



2. Calculer $P(U \cap C)$ et $P(\overline{U} \cap C)$.

$P(U \cap C) = P(U) \times P_U(C) = 0{,}25 \times 0{,}9 = 0{,}225$

$P(\overline{U} \cap C) = P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(C) = 0{,}75 \times 0{,}85 = 0{,}6375$

3. Déterminer la probabilité qu'Émilie doive utiliser son chalumeau pour cette intervention.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(U \cap C) + P(\overline{U} \cap C) = 0{,}225 + 0{,}6375 = 0{,}8625$$

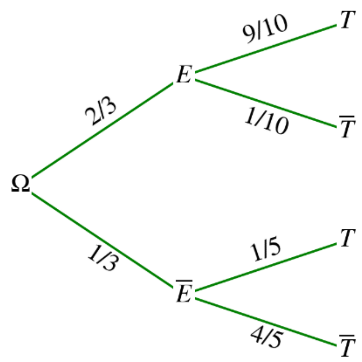
Exercice 4 (Niveau 2)

4 points

Léna prend tous les jours son petit-déjeuner sur sa terrasse ou dans sa cuisine. Lorsque le temps est ensoleillé, Léna prend son petit-déjeuner sur sa terrasse neuf fois sur dix. Sinon, elle le prend dans sa cuisine quatre fois sur cinq.
Dans la région où vit Léna, le temps est ensoleillé deux jours sur trois en moyenne.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné soit non ensoleillé et que, ce jour-là, Léna prenne son petit-déjeuner sur sa terrasse ?

Notons E et T les événements respectifs : « Ce jour est ensoleillé » et « Léna prend son petit déjeuner sur la terrasse »
L'énoncé donne $P(E) = \frac{2}{3}$, $P_E(T) = \frac{9}{10}$ et $P_{\bar{E}}(\bar{T}) = \frac{4}{5}$ et on cherche $P(\bar{E} \cap T)$.
On peut dresser l'arbre de probabilité ci-contre :



On a $P(\bar{E} \cap T) = P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un jour donné Léna prenne son petit-déjeuner sur sa terrasse ?

On cherche $P(T)$: d'après la formule des probabilités totales appliquée avec la partition $\{E, \bar{E}\}$, on a :
$P(T) = P(E \cap T) + P(\bar{E} \cap T) = P(E) \times P_E(T) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(T) = \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{15} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Exercice 5 (Niveau 3)

2 points

Pour un test de dépistage d'une maladie, on appelle *sensibilité* du test la probabilité que le test soit positif sachant qu'il a été effectué sur une personne malade et *spécificité* du test la probabilité qu'il soit négatif sachant quil a été effectué sur une personne saine.
On choisit au hasard une personne d'une population à risque concernant la maladie considérée, qui a subi un tel test.
On note respectivement M et T les événements :

- M : « Cette personne est malade » ;
- T : « Cette personne a eu un test positif »

1. Calculer P(T) dans les deux cas suivants :
   a. un quart de la population considérée est malade et les *sensibilité* et *spécificité* du test de la personne choisie sont respectivement égales à 0,9 et 0,8 ;

La sensibilité d'un test est la probabilité $P_M(T)$ et sa spécificité est $P_{\bar{M}}(\bar{T})$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$ d'où $P(T) = \frac{1}{4} \times 0{,}9 + \frac{3}{4} \times (1 - 0{,}8) = 0{,}375$.

   b. dans la population considérée, trois personnes sur cinq sont malades et les *sensibilité* et *spécificité* du test de la personne choisie sont respectivement égales à 0,8 et 0,9.

De même on obtient : $P(T) = \frac{1}{4} \times 0{,}8 + \frac{3}{4} \times (1 - 0{,}9) = 0{,}52$.

2. Dans lequel des deux cas précédents est-il plus probable que le résultat du test corresponde à l'état (malade ou non) de la personne testée ?

Il s'agit de comparer $P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap\overline{T})$ dans les deux cas.
On a $P(M\cap T)+P(\overline{M}\cap\overline{T})=P(M)\times P_M(T)+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(\overline{T})$.
Dans le cas ***1.a*** on obtient : $\frac{1}{4}\times 0{,}9+\frac{3}{4}\times 0{,}8=0{,}825$
Dans le cas ***1.b*** on obtient : $\frac{3}{5}\times 0{,}8+\frac{2}{5}\times 0{,}9=0{,}84$.
Il est donc plus probable que le résultat du test corresponde à l'état de la personne dans le cas ***1.b***

3. On appelle *valeur prédictive positive* du test (VPP) la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit malade et *valeur prédictive négative* du test (VPN) la probabilité qu'une personne ayant un test négatif ne soit pas malade.
Comparer les VPP et VPN des tests considérés dans chacun des cas de la question ***1.*** .

La VPP d'un test est $P_T(M)$ et sa VPN est $P_{\overline{T}}(\overline{M})$.
Dans le cas ***1.a*** la VPP est $\frac{\frac{1}{4}\times 0{,}9}{0{,}375}=\frac{3}{5}=0{,}6$ et sa VPN est $\frac{\frac{3}{4}\times 0{,}8}{1-0{,}375}=\frac{24}{25}=0{,}96$.
Dans le cas ***1.b*** la VPP est $\frac{\frac{3}{5}\times 0{,}8}{0{,}52}=\frac{12}{13}\approx 0{,}92$ et sa VPN est $\frac{\frac{2}{5}\times 0{,}9}{1-0{,}52}=\frac{3}{4}=0{,}75$.
Donc la VPP dans le cas ***1.a*** est inférieure à celle dans le cas ***1.b*** mais sa VPN est supérieure à celle dans le cas ***1.b***.

Exercice 6 (Niveau 3)

2 points

Dans cet exercice, on considère deux événements indépendants A et B.

1. Montrer que $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$.

La formule des probabilité totale permet d'écrire que :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

Ce qui peut aussi s'écrire $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$.

2. En déduire que $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$

A et B sont indépendants donc $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Donc $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\times P(B)=\big(1-P(A)\big)P(B)=P(\overline{A})\times P(B)$

3. Que peut-on en déduire pour les événements $\overline{A}$ et B ?

En déduire que A et $\overline{B}$ ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

On peut alors déduire de $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$ que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.