Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°2 Durée 1h30	11 octobre 2017

Exercice 1 (9 points) Asie Juin 2013

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

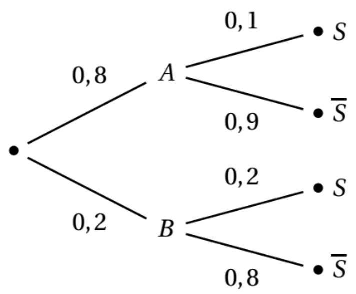
10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. ***a)*** Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap S$?

En suivant la troisième branche : $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$.

b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.

La formule des probabilités totale, nous permet d'écrire que :

$$p(\overline{S}) = p(A \cap \overline{S}) + p(B \cap \overline{S}) = 0{,}8 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}72 + 0{,}16 = 0{,}88$$

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Il faut donc calculer : $p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)}$.

On a vu que $p(\overline{S}) = 0{,}88$, donc $p(S) = 1 - p(\overline{S}) = 0{,}12$.

Donc $p_S(B) = \frac{0{,}2 \times 0{,}2}{0{,}12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ au centième près.

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans traces de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

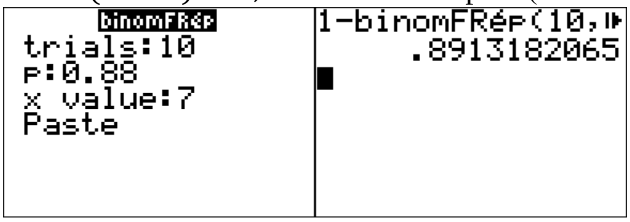
On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à 0,88. C'est une épreuve de Bernoulli.
On répète de façon indépendante 10 fois cette expérience la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$.
$X \backsim \mathcal{B}(10\,;0{,}88)$

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

Il faut trouver $p(X = 10)$
$\mathrm{P}(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0{,}88^{10} \times (1 - 0{,}88)^{10-10} = 0{,}88^{10} \approx 0{,}28$ au centième près.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Il faut trouver $P(X \geq 8)$.
$p(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}89$ au centième près (à l'aide de la calculatrice).



4. Calculer la probabilité pour qu'il est entre 2 et 8 boîtes qui **présentent des traces de pesticides**

Attention à l'énoncé !
Il faut trouver $P(2 \leq Y \leq 8)$ où $Y \backsim \mathcal{B}(10\,;0{,}12)$
$p(2 \leq Y \leq 8) = p(Y \leq 8) - p(Y < 2) = p(Y \leq 8) - p(Y \leq 1) \approx 0{,}34$ au centième près (à l'aide de la calculatrice).

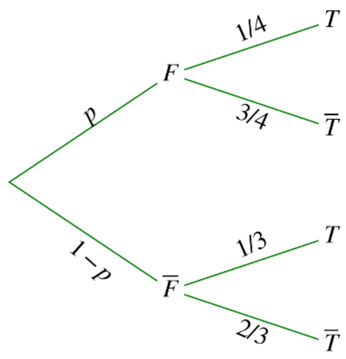
Exercice 2 Amérique du Nord – Mai 2012

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'événement « le membre choisi est une femme »,
- T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».



1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.

$\mathrm{T} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{F}) \cup (\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{F}})$. C'est une réunion d'événements incompatibles, donc :

$$p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{T} \cap \mathrm{F})) + p(\mathrm{T} \cap \overline{\mathrm{F}}) = p_{\mathrm{F}}(\mathrm{T})p(\mathrm{F}) + p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{T})p(\mathrm{T}).$$

Par conséquent : $p(\mathrm{T}) = p \times \frac{1}{4} + (1-p) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)p + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}p + \frac{1}{3}$

On sait que $p(\mathrm{T}) = 0{,}3 = \frac{3}{10}$.

On en déduit : $-\frac{1}{12}p + \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{p}{12} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$ d'où $p = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

La probabilité de l'événement F est : $\boxed{p(\mathrm{F}) = \frac{2}{5}}$

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

$p_{\mathrm{T}}(F) = \frac{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \frac{\frac{p}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{10p}{3 \times 4} = \frac{5p}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\boxed{p_{\mathrm{T}}(F) = \frac{1}{3}}$

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

a) Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y a ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.

Nous avons répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. N suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \frac{3}{10}$: $\boxed{N \backsim \mathcal{B}\left(4; \frac{3}{10}\right)}$.

On sait alors que $p(N = k) = \binom{4}{k} \times \frac{3}{10}^{k} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \times \frac{3}{10}^{k} \times 0,7^{4-k}$.

D'où : $p(N = 2) = \binom{4}{2} \times \frac{3}{10}^{2} \times 0,7^{2} = \boxed{\frac{1323}{5000} \approx 0{,}2646}$.

b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.

Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\dfrac{7}{10}\right)^n$.

Cette fois, N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{3}{10}\right)$.

$p_n = p(N \geq 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$: $\boxed{p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n}$.

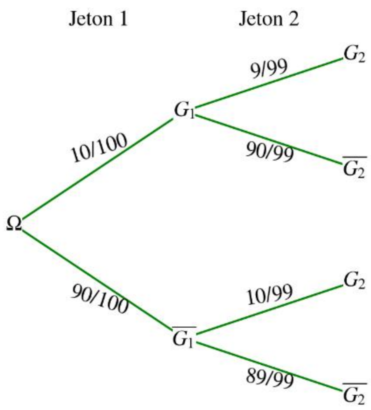
c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0{,}99$.

$p_n \geq 0{,}99 \iff 0{,}01 \geq 0{,}7^n \Leftrightarrow 0{,}01 - 0{,}7^n \geq 0$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $n \approx 12{,}9$.
Il faut que n soit supérieur ou égal à 13 pour que p_n soit supérieur à 0,99.

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 € chacun, les autres ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 € par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Résumons la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre où G_i est l'évènement « le jeton i est gagnant ».



X peut prendre les valeurs : -5 , 15 et 35.
À l'aide de l'arbre :

$P(X = -5) = P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = \frac{90}{100} \times \frac{89}{99} = \frac{89}{110}$.

$P(X = 15) = P(G_1 \cap \overline{G_2}) + P(\overline{G_1} \cap G_2) = \frac{10}{100} \times \frac{90}{99} + \frac{90}{100} \times \frac{10}{99} = \frac{2}{11}$.

$P(X = 35) = P(G_1 \cap G_2) = \frac{10}{100} \times \frac{9}{99} = \frac{1}{110}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-5	15	35
$p(X = x_i)$	$\frac{89}{110}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{110}$

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

L'espérance est $E(X) = \sum_i x_i p(X = x_i) = -5 \times \frac{89}{110} + 15 \times \frac{2}{11} + 35 \frac{1}{110} = -\frac{110}{110} = -1$. $\boxed{E(X) = -1}$.

Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.