Milieu et distance

Propriétés

$(O\,;I,J)$ est un repère quelconque du plan.
Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points de ce plan.

- Les **coordonnées du milieu** K du segment $[AB]$ sont données par les formules suivantes :

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}\quad ; \quad y_K=\frac{y_A+y_B}{2}$$

- Si le repère $(O\,;I,J)$ est **orthonormé**, alors la **distance AB** est égale à :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

Remarque : on peut aussi écrire : $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$
ou $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$

Maîtriser les propriétés

1 $(O\,;I,J)$ est un repère orthonormé du plan.
Pour chaque affirmation, cocher la bonne réponse :

a. On définit les points $A\left(1\,;-\dfrac{1}{3}\right)$ et $B\left(\dfrac{2}{3}\,;5\right)$.

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

☐ $I\left(\dfrac{10}{3}\,;\dfrac{28}{2}\right)$ ☐ $I\left(\dfrac{1}{6}\,;-\dfrac{8}{3}\right)$ ☒ $I\left(\dfrac{5}{6}\,;\dfrac{7}{3}\right)$

b. On définit les points $A(3\,;0)$ et $B\,(-2\,;-2)$.
La distance AB est égale à :

☐ 7 ☐ −7 ☒ $\sqrt{29}$

c. On définit les points $A(2\,;4)$ et $B(1\,;5)$, ainsi que le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 2.

☐ $AB=2$ ☐ $B\in(\mathscr{C})$ ☒ B est à l'intérieur de $(\mathscr{C})$

2 $(O\,;I,J)$ est un repère quelconque du plan. On définit les points $A(2\,;0)$ et $B(6\,;0)$.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

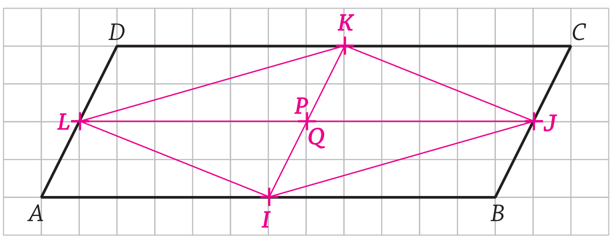
a. Le point C, symétrique de A par rapport à B, a pour coordonnées $(4\,;0)$. Faux

b. Le point E, symétrique du milieu de $[AB]$ par rapport à O, a pour coordonnées $(-4\,;0)$. Vrai

Appliquer

3 $ABCD$ est un parallélogramme. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
P et Q sont les milieux respectifs de $[LJ]$ et $[KI]$.

1. Compléter la figure suivante en plaçant les points I, J, K, L, P et Q. Représenter le quadrilatère $IJKL$.



2. Le plan est rapporté au repère $(A\,;B,D)$.

a. Donner les coordonnées des points I, J, K et L par lecture graphique :

$I(0{,}5\,;0)$ $J(1\,;0{,}5)$ $K(0{,}5\,;1)$ $L(0\,;0{,}5)$

b. Compléter les calculs des coordonnées de P et Q :

$x_P=\dfrac{x_L+x_J}{2}$ et $y_P=\dfrac{y_L+y_J}{2}$.

$x_P=\dfrac{0+1}{2}$ et $y_P=\dfrac{0{,}5+0{,}5}{2}$ $P(0{,}5\,;0{,}5)$

$x_Q=\dfrac{x_K+x_I}{2}$ et $y_Q=\dfrac{y_K+y_I}{2}$.

$x_Q=\dfrac{0{,}5+0{,}5}{2}$ et $y_Q=\dfrac{1+0}{2}$ $Q(0{,}5\,;0{,}5)$

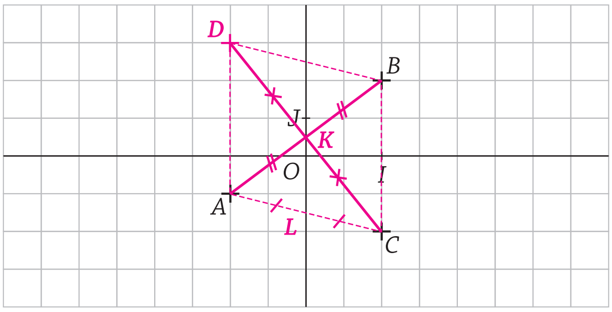
c. Que peut-on dire des points P et Q ?

Les points P et Q ont les mêmes coordonnées, donc ils sont confondus.

3. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

Les diagonales du quadrilatère $IJKL$ ont même milieu. Donc le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

4 Dans la figure ci-dessous, $(O\,;I,J)$ est un repère orthogonal du plan.
On donne trois points : A, B et C.



1. Donner les coordonnées des points A, B et C par lecture graphique :
$A(-1\,;-1)$, $B(1\,;2)$ et $C(1\,;-2)$

2. Soit le point K, milieu du segment $[AB]$.
a. Construire le point K sur le schéma ci-dessus.
b. Afin de calculer les coordonnées du point K, compléter la rédaction suivante :
$A(-1\,;-1)$, $B(1\,;2)$ et K milieu de $[AB]$.

Donc $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Donc $x_K = 0$ et $y_K = 0{,}5$

Donc $K(0\,;0{,}5)$.

c. Vérifier ce résultat graphiquement.

3. Soit le point $L(0\,;-1{,}5)$.
a. Construire le point L sur le schéma ci-dessus.
b. Quelle conjecture peut-on faire pour le point L ?
L est le milieu du segment $[AC]$.
c. Afin de démontrer la conjecture, compléter la rédaction suivante :
Soit le point P, milieu de $[AC]$.
$A(-1\,;-1)$ et $C(1\,;-2)$.

Donc $x_P = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ et $y_P = \dfrac{y_A + y_C}{2}$

Donc $x_P = 0$ et $y_P = -1{,}5$

Donc $P(0\,;-1{,}5)$.

Les points L et P ont les mêmes coordonnées donc ils sont confondus.
Donc le point L est le milieu du segment $[AC]$.

4. Soit le point D, le symétrique de C par rapport au point K.
a. Construire le point D et lire ses coordonnées.
$D(-1\,;3)$
b. Afin de démontrer le résultat obtenu par lecture graphique, compléter la rédaction suivante :
$C(1\,;-2)$ et $K(0\,;0{,}5)$.
Le point D est le symétrique du point C par rapport au point K si et seulement si K est le milieu de $[CD]$.

Donc $x_K = \dfrac{x_D + x_C}{2}$ et $y_K = \dfrac{y_D + y_C}{2}$

Donc $0 = \dfrac{x_D + 1}{2}$ et $0{,}5 = \dfrac{y_D - 2}{2}$

Donc $0 = x_D + 1$ et $1 = y_D - 2$

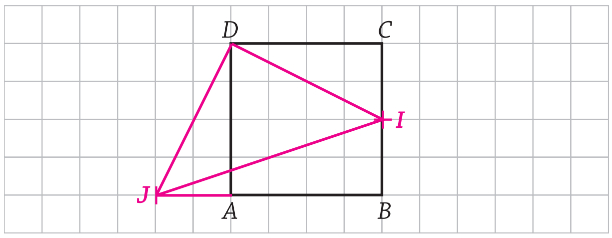
Donc $x_D = -1$ et $y_D = 3$ donc $D(-1\,;3)$.

5. a. Construire le quadrilatère $ABCD$.
b. Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.
Le quadrilatère $ACBD$ est un parallélogramme.
Les diagonales de ce quadrilatère ont même milieu : le point K est le milieu du segment $[AB]$ et du segment $[CD]$.

5 Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré.
Le point I est le milieu du segment $[BC]$. J est le point de la demi-droite d'origine B passant par A tel que :

$$BJ = \frac{3}{2}BA\,.$$

1. Construire les points I et J.



2. On se place dans le repère orthonormé $(A\,;B,D)$.
a. Donner les coordonnées des points C, B, et J par lecture graphique :
$C(1\,;1)$ $B(1\,;0)$ $J(-0{,}5\,;0)$
b. Déterminer les coordonnées du point I en complétant le calcul suivant :
Le point I est le milieu du segment $[BC]$.

Donc $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2}$

Donc $x_I = 1$ et $y_I = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow I(1\,;0{,}5)$.

c. Afin de calculer IJ^2, DJ^2 et DI^2, compléter les calculs suivants :
$I(1\,;0{,}5)$ $J(-0{,}5\,;0)$ $D(0\,;1)$

$IJ^2 = 1{,}5^2 + 0{,}5^2 = 2{,}5$
$DJ^2 = 0{,}5^2 + 1^2 = 1{,}25$
$DI^2 = 1^2 + 0{,}5^2 = 1{,}25$

d. Montrer que le triangle DIJ est un triangle rectangle.
Pour cela, compléter la démonstration suivante :
$DI^2 + DJ^2 = 1{,}25 + 1{,}25 = 2{,}5$ et $IJ^2 = 2{,}5$
$IJ^2 = DI^2 + DJ^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle DIJ est un triangle rectangle en D.