Corrigé du DS n°2

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-10x+11}{2(x-1)^2}$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = x + 3 + \frac{5}{2(x-1)^2}$

$$x+3+\frac{5}{2(x-1)^2} = \frac{(x+3)\times 2(x-1)^2+5}{2(x-1)^2} = \frac{(x+3)\times(2x^2-8x+2)+5}{2(x-1)^2} = \frac{2x^3+2x^2-10x+11}{2(x-1)^2}$$

2. *a.* Calculer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

- Limite à l'infini

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{2(x-1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

  De la même façon, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- Limite en 1

  $\lim\limits_{x\to1} \frac{5}{2(x-1)^2} = +\infty$ car $(x-1)^2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to1}(x+3) = 4$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.

b. Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe C.

Comme $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$, la courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

c. Etudier la position relative de la courbe C et de la droite D d'équation : $y = x + 3$.

Il faut pour cela étudier le signe de $f(x) - (x+3)$.

$f(x) - (x+3) = x + 3 + \frac{5}{2(x-1)^2} - (x+3) = \frac{5}{2(x-1)^2} > 0$.

Pour tout x de $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$, $f(x) - (x+3) > 0$ donc la courbe est au dessus de C sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

3. On admet que le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{27}{10}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{1313}{200}$	$\nearrow$	

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-4\,;\,-1[$.

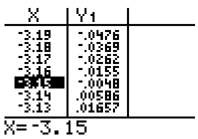
Sur l'intervalle $]-4\,;\,-1[$, la fonction f est continue et strictement croissante.

De plus $f(-4) = -0{,}9$ et $f(-1) = 2{,}625$ donc $0 \in\,]-0{,}9\,;2{,}625[$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-4\,;\,-1[$.

b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha = -3{,}15$ α à 10^{-2} près par défaut.



X	Y1
-3.19	-.0476
-3.18	-.0369
-3.17	-.0262
-3.16	-.0155
-3.15	-.0048
-3.14	.00586
-3.13	.01657

X=-3.15

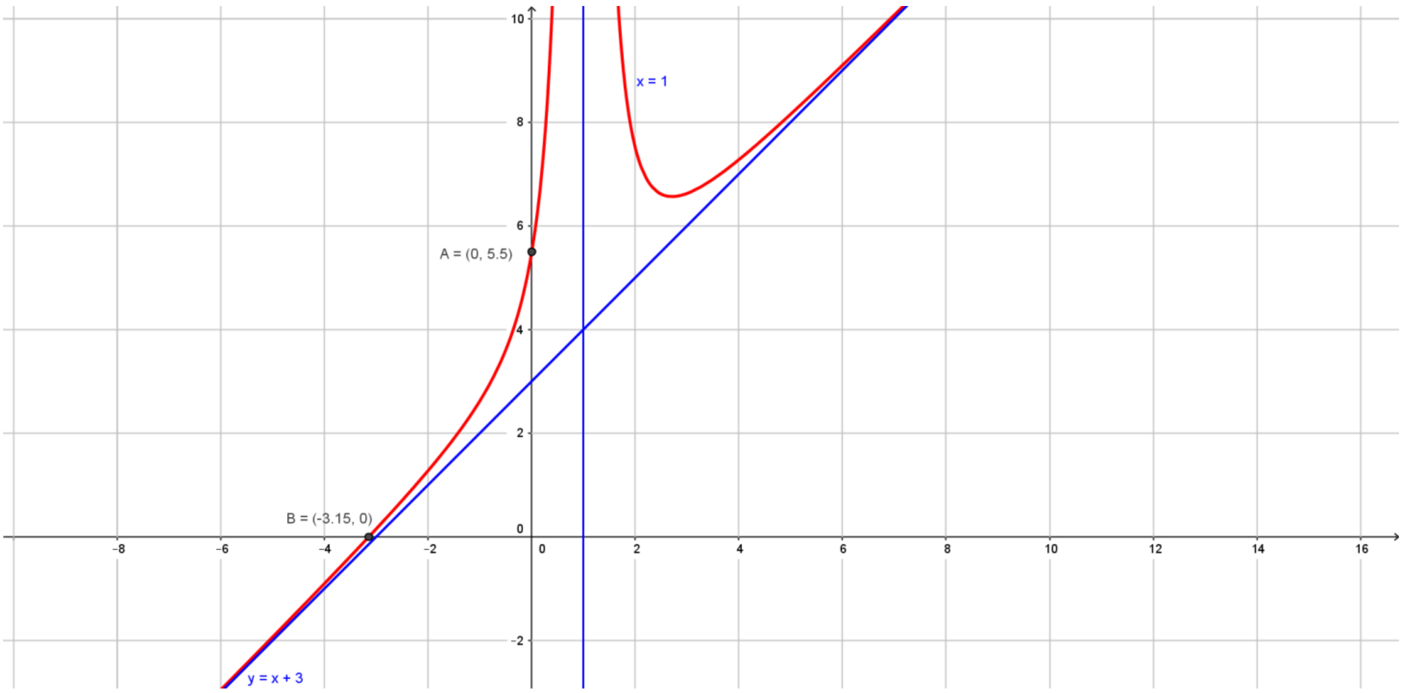
c. Combien l'équation f(x) = 0 admet-elle de solutions dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$? Justifier.

La fonction f admet un minimum absolu strictement positif sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ donc f est strictement positive sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ et ne peut donc pas s'annuler sur cet intervalle.
Finalement, l'équation f(x) = 0 n'admet aucune solution dans l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

4. Quels sont les points d'intersection de C avec l'axe des ordonnées ? l'axe des abscisses ?

- C coupe l'axe des ordonnées au point $A(x\,;y)$ si et seulement si $x = 0$ et $y = f(0)$. Comme $f(0) = 5{,}5$, la courbe C coupe l'axe des ordonnées au point $A(0\,;5{,}5)$.
- C coup l'axe des abscisses si et seulement si $f(x) = 0$ or d'après les questions 3.a. et 3.c. , l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ donc C coup l'axe des abscisses en un unique point de coordonnées $B(\alpha\,;0)$ où $\alpha \approx -\,3{,}15$.

5. Tracer dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les asymptotes, la courbe C, la droite D, α et les points d'intersection avec les axes (unités : 1cm ou un carreau).



Exercice 2 (5 points)

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

$$M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 40 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3$$

Donc $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

$$M^3 = M^2 + 8M + 6I \iff M^3 - M^2 - 8M = 6I \iff M(M^2 - M - 8I) = 6I \Leftrightarrow M\frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = I$$

La matrice N définie par $N = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$ vérifie donc l'égalité $M \times N = I$. Ceci prouve que la matrice M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$

Partie B : Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ -1)$ et $C(2\ ;\ 5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On cherche à déterminer trois réels a, b et c tels que la parabole P d'équation y = $ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5). Or :

$$\left\{\begin{array}{lll} A(1\,;\,1) \in \mathcal{P} & \Longleftrightarrow & 1 \;= a \times 1^2 + b \times 1 + c \\ B(-1\,;\,-1) \in \mathcal{P} & \Longleftrightarrow & -1 \;= a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c \\ C(2\,;\,5) \in \mathcal{P} & \Longleftrightarrow & 5 \;= a \times 2^2 + b \times 2 + c \end{array}\right. \Bigg| \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a+b+c & = 1 \\ a-b+c & = -1 \\ 4a+2b+c & = 5 \end{array}\right.$$

Or on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} a+b+c & = 1 \\ a-b+c & = -1 \\ 4a+2b+c & = 5 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que :

$$\boxed{M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

On a montré que la matrice M était inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

$$M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Or, $M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} \times M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Partie C : Retour au cas général

Les nombres a, b, c , p , q , r sont des entiers.

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$, on considère les points $A(1\,;\,p)$, $B(-1\,;\,q)$ et $C(2\,;\,r)$.

On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors $\begin{cases} -3p+q+2r \equiv 0[6] \\ 3p-3q \equiv 0[6] \\ 6p+2q-2r \equiv 0[6] \end{cases}$.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3p+q+r \\ 3p-3q \\ 6p+2q-2r \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à $\begin{cases} a = \frac{-3p+q+2r}{6} \\ b = \frac{-3p-3q}{6} \\ c = \frac{6p+2q-2r}{6} \end{cases}$.

Donc si a, b et c sont des entiers, cela implique $(-3p + q + 2r)$, $(3p - 3q)$ et $(6p + 2q - 2r)$ sont des multiples de 6.

De fait, leur reste modulo 6 est alors égal à zéro, on dit aussi qu'ils sont congrus à 0 modulo 6.

On a bien montré l'implication demandée.

2. En déduire que $\begin{cases} p - q \equiv 0\ [2] \\ q - r \equiv 0\ [3] \end{cases}$.

On a montré que si a , b et c sont des entiers alors $\begin{cases} -3p+q+r \equiv 0[6] \\ 3p-3q \equiv 0[6] \\ 6p+2q-2r \equiv 0[6] \end{cases}$

- **Montrons que : $\boldsymbol{p - q \equiv 0}$ [2].**

La deuxième égalité de congruence, $3p - 3q \equiv 0\ [6]$ peut s'écrire $3(p - q) \equiv 0\ [6]$ ce qui implique que 6 divise $3 \times (p - q)$ et donc que $(p - q)$ est un multiple de 2.

De ce fait, on a alors : $p - q \equiv 0\ [2]$

On a montré l'implication : $3(p - q) \equiv 0\ [6] \Rightarrow (p - q) \equiv 0\ [2]$

- **Montrons que : $\boldsymbol{q - r \equiv 0}$ [3].**

Utilisons la troisième égalité de congruence.

On a de manière immédiate, $6p \equiv 0[6]$ et comme $6p + 2q - 2r \equiv 0[6]$ alors $6p + 2q - 2r - 6p \equiv 0[6]$ soit $2q - 2r \equiv 0[6]$ ou encore $2(q - r) \equiv 0[6]$ donc $q - r$ est un multiple de 3 ce qui s'écrit $q - r \equiv 0\ [3]$.

On a bien $\begin{cases} p - q \equiv 0\ [2] \\ q - r \equiv 0\ [3] \end{cases}$.

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} p - q \equiv 0\ [2] \\ q - r \equiv 0\ [3] \end{cases}$ et si A, B, C ne sont pas alignés, alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on a $A(1\,; p)$, $B(-1\,; q)$ et $C(2\,; r)$.

Les points A , B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires soit :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ q-p \end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ r-p \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2 \times (r - p) = 1 \times (q - p) \Leftrightarrow 2r + q - 3p = 0.$

On a montré que : Les points A , B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b. On choisit $p = 7$.
Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

Si $p = 7$ alors

$$\begin{cases} p - q \equiv 0\ [2] \\ q - r \equiv 0\ [3] \\ 2r + q - 21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \equiv 7\ [2] \\ q - r \equiv 0\ [3] \\ 2r + q - 21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q \equiv 1\ [2] \\ q - r \equiv 0\ [3] \\ 2r + q - 21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2k + 1 \\ 2k + 1 - r \equiv 0\ [3] \\ 2r + q - 21 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2k + 1 \\ \mathrm{r} - 2k \equiv 1\ [3] \\ 2r + q - 21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2k + 1 \\ r = 2k + 3k' + 1 \\ 2(2k + 3k' + 1) + 2k + 1 - 21 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2k + 1 \\ r = 2k + 3k' + 1. \\ k + k' \neq 3 \end{cases}$$

On peut choisir par exemple $k = 0$ et $k' = 0$ et alors $q = 1$ et $r = 1$.

On alors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

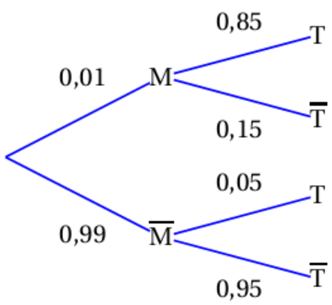
- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

On suit la première branche : la probabilité est égale à $p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$.

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

La probabilité qu'il soit non porteur de la maladie et que son test soit positif (troisième branche) est égale à $0,99 \times 0,05 = 0,0495$.

On a donc $p(\mathrm{T}) = p(\mathrm{M}) \times p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + p\left(\overline{\mathrm{M}}\right) \times p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0,0085 + 0,0495 = 0,058$.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

Il faut calculer $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{T})} = \dfrac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$.

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

On répéte 5 fois de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli (S = « le test est positif ») avec $p(S) = 0,058$ donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0,058$.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0,058)$.

La probabilité que k animaux aient un test positif est égale à : $P(X = k) = \binom{5}{k} \times 0,058^k \times (1 - 0,058)^{5-k}$.

<u>*Facultatif :*</u> On obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

$\mathrm{X} = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(\mathrm{X} = x_i)$	0,7417	0,2284	0,0281	0,0017	0,0001	0

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

L'évènement contraire est : tous les animaux ont un test négatif qui d'après le tableau précédent a une probabilité d'environ 0,7417.
Si le tableau n'a pas été réalisé : $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,942^5$
La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est donc : $1 - 0,7417 = 0,2583$.

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

On a d'après les données du tableau : E $= 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,0580 + 1000 \times 0,0015 = 5,80 + 1,50 = 7,30$.
Ceci représente le coût moyen par animal.

b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Pour 200 bêtes, le coût sera en moyenne de : $200 \times 7,30 = 1460$.

Exercice 4 (5 points)

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) \qquad (1) \ .$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{7}$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2}\left(x^2 - 7\right)$ qui est du signe de $x^2 - 7$.

Donc $f'(x) = 0 \iff x^2 - 7 = 0 \iff \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = 0 \iff \left(x = \sqrt{7} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{7}\right)$.

Il y a donc une solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$: $\sqrt{7}$.

Le trinôme $x^2 - 7$ est positif sauf entre ses racines donc ici sur $\left]0\,;\sqrt{7}\right[$.

Conclusion : f est décroissante sur $\left]0\,;\sqrt{7}\right[$ puis croissante sur $\left]\sqrt{7}\,;+\infty\right[$; donc $f\left(\sqrt{7}\right)$ est le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$.

$$f\left(\sqrt{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \sqrt{7}\right) = \sqrt{7}.$$

Par définition du minimum, on a donc pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$ y compris $u_0 = 3$, car $3^2 > 7$.

2. ***a.*** Soit n un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7 - u_n^2}{u_n}\right).$$

Comme $\frac{1}{2} > 0$, $u_n > 0$ et que $u_n \geqslant \sqrt{7} \iff u_n^2 \geqslant 7 \iff u_n^2 - 7 \geqslant 0 \iff 7 - u_n^2 \leqslant 0$, on en conclut que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

c. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

La suite (u_n) étant décroissante et minorée par $\sqrt{7}$ est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à $\sqrt{7}$.

c. On déduit de la relation (1) que la limite L de cette suite est telle que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right)$.

Déterminer L.

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{7}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \frac{7}{\ell} \iff \ell = \frac{7}{\ell} \iff \ell^2 = 7 \iff \ell = \sqrt{7} \text{ (puisque la limite est positive).}$$

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$.

$$u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^{\ 2}+7}{u_n}-2\sqrt{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^{\ 2}-2\sqrt{7}\times u_n+7}{u_n}\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(u_n-\sqrt{7}\right)^2}{u_n}$$

4. On définit la suite (d_n) par : $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n^2$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n-\sqrt{7}\leq d_n$.

Initialisation : $u_0-\sqrt{7}=3-\sqrt{7}\approx 0{,}35$ et $d_0=1$.

On a bien $u_0-\sqrt{7}\leqslant d_0$.

Hérédité :

Remarque préliminaire : on a démontré que $u_n\geqslant\sqrt{7}$, donc $u_n>1$ ou encore $\frac{1}{u_n}<1\quad(2)$.

Supposons qu'il existe un naturel n tel que $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$.

On a démontré à la question 3 que :

$u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\frac{\left(u_n-\sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. Donc comme $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n \iff \left(u_n-\sqrt{7}\right)^2\leqslant d_n^2$, l'égalité du 3 donne :

$u_{n+1}-\sqrt{7}<\frac{1}{2}d_n^2\times\frac{1}{u_n}<\frac{1}{2}d_n^2$ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.

Finalement $u_{n+1}-\sqrt{7}<\frac{1}{2}d_n^2 \iff u_{n+1}-\sqrt{7}<d_{n+1}$.

L'hérédité est établie.

Pour tout entier naturel n, $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$.

b. Voici un algorithme :

Variables	*n* et *p* sont des entiers naturels, *d* est un réel.
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*.
Initialisations	Affecter à *d* la valeur 1. Affecter à *n* la valeur 0.
Traitement	Tant que $d > 10^{-p}$. Affecter à *d* la valeur $0{,}5d^{2}$ Affecter à *n* la valeur $n + 1$. Fin tant que
Sortie	Afficher *n*.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?
Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

L'algorithme indique que pour que $d_n\leqslant 10^{-9}$ il faut que $n\geqslant 5$ .On a donc $d_5\leqslant 10^{-9}$.

Comme $u_5-\sqrt{7}<d_5$ c'est-à-dire $u_5-\sqrt{7}<10^{-9}$, on en déduit que u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.