Corrigé du DS n°1

Exercice 1 (6 points)

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 40% des filles et 30% des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note *A* l'événement : « L'élève choisi fume », et *P*(*A*) la probabilité de cet événement. On note *F* l'événement : « L'élève choisi est une fille ».

Quelle est la probabilité que :

a) Cet élève soit un garçon ?

$P(\bar{F}) = 1 - P(F)$ et $P(F) = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$ donc $P(\bar{F}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

b) Cet élève soit une fille qui fume ?

On cherche $P(F \cap A)$: $P(F \cap A) = P_F(A) \times P(F)$ et $P_F(A) = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$

donc $P(F \cap A) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$

c) Cet élève soit un garçon qui fume ?

On cherche $P(\bar{F} \cap A)$: $P(\bar{F} \cap A) = P_{\bar{F}}(A) \times P(\bar{F})$ et $P_{\bar{F}}(A) = \dfrac{30}{100} = 0{,}3$

donc $P(\bar{F} \cap A) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

2. Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que *P(A)* = 0,36.

$P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap \bar{F}) = 0{,}24 + 0{,}12 = 0{,}36$

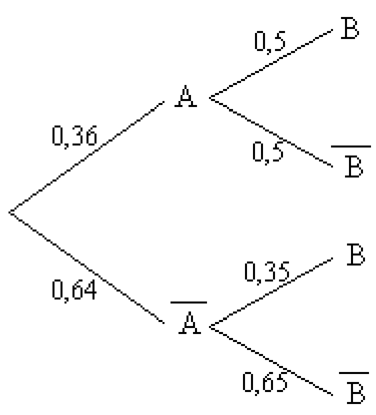
3. L'enquête permet de savoir que :

- Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- Parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ».

On notera $P_D(C)$ la probabilité de l'événement C sachant l'événement D.

Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.



a) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$.

En déduire *P*(*B*).

$P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}36 = 0{,}18$ et $P(\bar{A} \cap B) = 0{,}64 \times 0{,}35 = 0{,}224$.

$Alors\ P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}18 + 0{,}224 = 0{,}404$.

b) Calculer $P_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculer $P_{\bar{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

$P_B(A)=\dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}=\dfrac{0{,}18}{0{,}404} \approx 0{,}446.$

$P_{\bar{B}}(A) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})}$ et $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}596$ de plus $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}36 \times 0{,}5 = 0{,}18.$

Donc $P_{\bar{B}}(A)=\dfrac{0{,}18}{0{,}596} \approx 0{,}302.$

Un élève qui a des parents fumeurs a donc plus de chance de se mettre à fumer qu'un élève qui a des parents non-fumeurs.

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36.
On choisit 10 élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

a) Quelle loi de probabilité semble-t-il judicieux d'utiliser. Justifier.

La loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}36$ semble la plus adaptée dans cette situation.

En effet, le tirage avec remise induit la répétition de manière indépendante d'un schéma de Bernoulli ou le succès est « l'élève est fumeur » avec une probabilité égale à 0,36.

La variable aléatoire X correspondant au nombre d'élèves fumeur au sein de ce groupe de 10 élèves.

On a alors $P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0{,}36^k \times 0{,}64^{10-k}$.

b) Calculer la probabilité qu'aucun de ces dix élèves ne soit fumeur.

$P(X = 0) = 0{,}64^{10} \approx 0{,}012$

La probabilité qu'aucun de ces dix élèves ne soit fumeur est égal à 0,012 à 10^{-3}.

c) Calculer la probabilité qu'il y est au moins un élève fumeur.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}012 = 0{,}988.$

La probabilité qu'il y est au moins un élève fumeur est égale à 0,988 à 10^{-3}.

d) Calculer la probabilité que le nombre d'élèves fumeurs soit compris entre 3 et 7.

On cherche $P(3 \leq X \leq 7)$.
Comme $P(3 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X < 3) = P(X \leq 7) - P(X \leq 2)$ on a, à l'aide de la calculatrice :
$P(3 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 2) \approx 0{,}994 - 0{,}240 = 0{,}754.$
La probabilité que le nombre d'élèves fumeurs soit compris entre 3 et 7 est égale à 0,733 à 10^{-3}.

Exercice 2 (6 points)

Partie A

1. Restitution Organisée de connaissances

Posons, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x , y , x' , y' sont des réels.

a. Montrer que pour tout complexe z et z' : $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

$\overline{z \times z'} = \overline{(x+\imath y) \times (x' + \imath y')} = \overline{(xx' - yy') + \imath(xy' + x'y)} = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$

$\bar{z} \times \bar{z'} = \left(\overline{x+\imath y}\right) \times \left(\overline{x' + \imath y'}\right) = (x - iy) \times (x' - iy') = (xx' - yy') - i(xy' + x'y)$

On a bien $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

b. Montrer que pour tout complexe z non nul $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ puis en déduire que $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

- $1 = \bar{1} = \overline{\left(\frac{z}{z}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ or $1 = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(z' \times \frac{1}{z}\right)} = \bar{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \bar{z'} \times \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 + 4z + 3$.

1. Soit $P(z) = z^3 + (3-i)z^2 + 3(1-i)z - 3i$.

a. Calculer $P(i)$.

$P(i) = i^3 + (3 - i) \times i^2 + 3(1 - i) \times i - 3i = -i - 3 + i + 3i + 3 - 3i = 0$

Donc $P(i) = 0$

b. Déterminer a, b et c tels que $P(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

$(z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - ai)z^2 + (c - bi)z - ic$ ainsi $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$ si et seulement si : $\begin{cases} a = 1 \\ b - ai = 3 - i \\ c - bi = 3 - 3i \\ -ic = -3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$ et par conséquent, $P(z) = (z - i)(z^2 + 3z + 3)$.

c. Déterminer toutes les solutions de l'équations $P(z) = 0$.

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 + 3z + 3) = 0 \Leftrightarrow (z = i \ \ ou \ \ z^2 + 3z + 3 = 0)$

Résolution de $z^2 + 3z + 3 = 0$.

C'est un polynôme du second degré dans $\mathbb{C}$ a coefficients réels.

$\Delta = 9 - 4 \times 3 = -3 < 0$ donc le polynôme admet deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$z = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z' = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, l'équation admet trois solutions : i , $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.

$M = M' \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow z = z^2 + 4z + 3 \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0$.

Les solutions de cette dernière équation ont été déterminées à la question précédente. Il y a donc bien deux points invariants, l'un d'affixe $-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et l'autre d'affixe $-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit A le point d'affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.

a. Placer les points A et B dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

b. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

Calculons les trois longueurs OA, OB et AB.

Le point A ayant pour affixe $\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$, ses coordonnées sont donc $A(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $B(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

- $OA^2 = (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$
- $OB^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$
- $AB^2 = \left(\frac{-3}{2} - \frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$

Les trois distances sont égales donc le triangle OAB est équilatéral.

4. Soit $z = x + iy$, l'affixe de M. (On rappelle que x et y sont réels.)

a. Déterminer $Re(z')$ et $Im(z')$ en fonction de x et y.

$z' = z^2 + 4z + 3 = (x+iy)^2 + 4(x+iy) + 3 = (x^2 - y^2 + 4x + 3) + i(2xy + 4y)$

Ainsi $Re(z') = x^2 - y^2 + 4x + 3$ et $Im(z') = 2xy + 4y$.

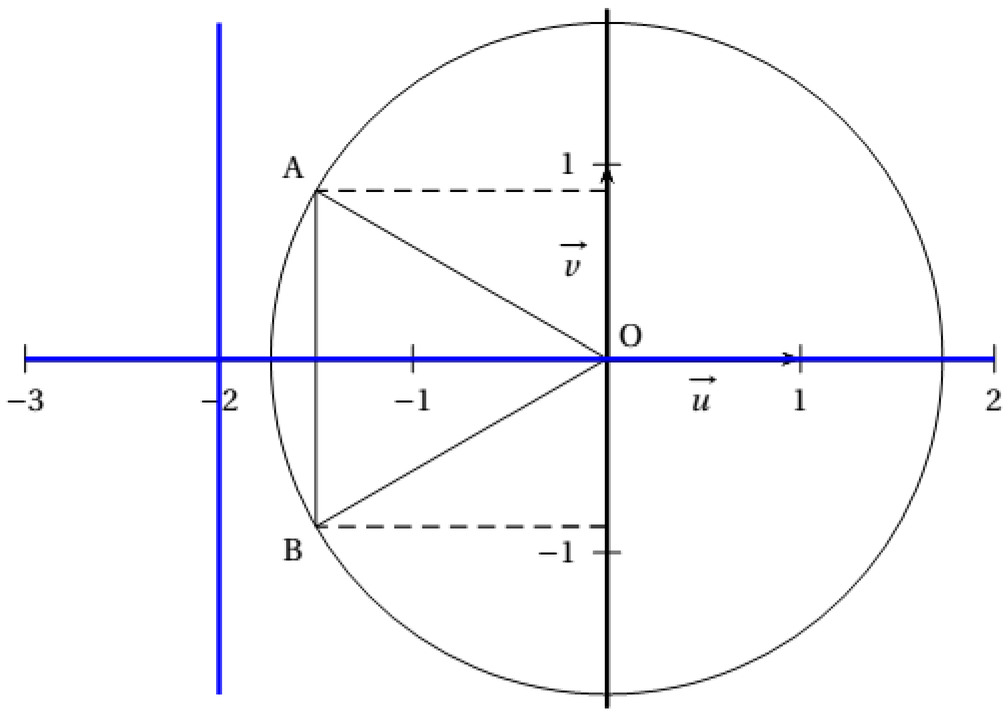
b. Déterminer l'ensemble (E) des points M tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

M' est sur l'axe des réels si et seulement si son affixe z' est un réel c'est-à-dire si $Im(z') = 0$.

$$Im(z') = 0 \iff 2xy + 4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \begin{cases} y = 0 \\ ou \\ x = -2 \end{cases}.$$

Conclusion : l'ensemble E est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).

c. Représenter l'ensemble (E) dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.



Exercice 3 (3 points)

Les trois questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
Un point sera attribué pour chaque réponse correctement justifiée. Aucun point ne sera attribué à une réponse non justifiée.

1. Soit n un entier naturel. On considère les deux entiers a et b définis par :
   $a = 2n^2 + 7n + 21$ et $b = 2n + 2$.

   Affirmation : pour tout entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b sont respectivement égaux à $n + 2$ et à $n + 17$.

$2n^2 + 7n + 21 = (2n + 2)(n + 2) + (n + 17)$

Cette égalité est la division euclidienne de a par b si et seulement si $0 \leq n + 17 < 2n + 2$ c'est-à-dire si $15 < n$ et non pour tout entier naturel n.

On aurait pu utiliser un contre-exemple : si n = 0 par exemple, on trouve a = 21 et b = 2…

L'affirmation est donc FAUSSE.

2. On considère l'entier $N = 3^{2012}$.
   Affirmation : Le reste de la division euclidienne de N par 7 est égal à 6.

$3^3 = 27 = 4 \times 7 + (-1) \equiv -1 \ mod[7]$ or $2012 = 3 \times 670 + 2$ donc

$3^{2012} = 3^{3\times 670+2} = (3^3)^{670} \times 3^2$

Par conséquent, $3^{2012} \equiv (-1)^{670} \times 3^2 \ mod[7] \equiv 3^2 \ mod[7] \equiv 2 \, mod[7]$.

Comme $0 \leq 2 < 7$, 2 est le reste de la division euclidienne de N par 7 .

L'affirmation est donc FAUSSE.

3. On considère l'entier $M = 2^{4n+1} + 3^{4n+1}$.
   Affirmation : M est divisible par 5 quel que soit l'entier naturel n.

$2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1 \equiv 1 \ mod[5]$ donc $2^{4n+1} = 2^{4n} \times 2 \equiv 1^n \times 2 \ mod[5] \equiv 2 \ mod[5]$

$3^4 = 81 = 16 \times 5 + 1 \equiv 1 \ mod[5]$ donc $3^{4n+1} = 3^{4n} \times 3 \equiv 1^n \times 3 \ mod[5] \equiv 3 \ mod[5]$

Par conséquent : $M = 2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 2 + 3 \ mod[5] \equiv 0 \, mod[5]$ ce qui signifie que M est un multiple de 5.

L'affirmation est donc VRAIE.

Exercice 4 (5 points)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

valeur de k	1	2	
valeur de u	5	1	$-0,5$

On obtient en sortie : $-0,5$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement : Sortie:	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Afficher u Fin de pour

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

Puisque $u_4 > u_3$ la suite (u_n) n'est pas décroissante, du moins pas avant le rang 4.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Initialisation : on vient de voir que $u_4 > u_3$: la relation est vraie pour $n = 3$.

Hérédité : on suppose qu'il existe un naturel p tel que $u_{p+1} > u_p$.

d'où $0,5u_{p+1} > 0,5u_p$; d'autre part : $p+1 > p \iff 0,5(p+1) > 0,5p$ d'où par somme des ces deux dernières inégalités :

$0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) > 0,5u_p + 0,5p$ et en ajoutant $-1,5$ à chaque membre :

$0,5u_{p+1} + 0,5(p+1) - 1,5 > 0,5u_p + 0,5p - 1,5$ soit $u_{p+2} > u_{p+1}$: la relation est vraie au rang $p+1$.

Conclusion : on a donc démontré que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 4.

4. Soit v_n la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite v_n est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

Pour tout naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 \\
&= 0,1u_{n+1} - 0,1n + 0,4 \\
&= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 \\
&= 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 \\
&= 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\
&= 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\
&= 0,5v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.

Le premier terme est : $v_0 = 0,1\times 5 - 0,1\times 0 + 0,5 = 1$ on a donc pour tout naturel n, $v_n = 1\times 0,5^n = 0,5^n = \dfrac{1}{2^n}$.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10\times 0,5^n + n - 5$.

On a

$v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5 \iff 10\times 0,5^n = u_n - n + 5 \iff u_n = 10\times 0,5^n + n - 5$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) ne converge pas.