FICHE MÉTHODE : DÉTERMINER UNE ÉQUATION DE LA TANGENTE À UNE COURBE

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \mathbf{e}^{\frac{1-x^2}{2}}$.

On note C_f sa courbe représentative.

1) Calculer la dérivée f' de f.
2) Déterminer une équation de la tangente Δ à C_f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

SOLUTION

1) La fonction f est du type : $f = \mathbf{e}^u$ avec $u(x) = \dfrac{1-x^2}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x^2$

   Nous avons donc : $f' = u'\,\mathbf{e}^u$

   Ce qui donne : $f'(x) = -x\,\mathbf{e}^{\frac{1-x^2}{2}}$

2) **Méthode 1** (méthode constructive)

   Déterminons d'abord le point A commun à C_f et Δ :

   On sait que l'abscisse de A est $x_0 = 1$. L'ordonnée de A est donc : $f(1) = \mathbf{e}^0 = 1$.

   La droite Δ est donc tangente à C_f au point $A(1\,;\,1)$.

   Déterminons maintenant une équation de Δ :

   La tangente Δ est une droite d'équation : $y = ax + b$

   On sait que le coefficient directeur a de la tangente est égal au nombre dérivé de f en x_0 :

   $$\boldsymbol{a = f'(1)}$$

   D'après la question 1, nous avons donc : $a = -\mathbf{e}^0 = -1$

   La tangente Δ a donc une équation de la forme : $y = -x + b$

   On détermine l'ordonnée à l'origine b avec la condition : $A \in \Delta$. Les coordonnées du point A vérifient donc l'équation de la tangente Δ : $y_A = -x_A + b$

   $$1 = -1 + b$$

   $$b = 2$$

   Conclusion : une équation de Δ est : $y = -x + 2$

   Méthode 2 (utilisation de formule)

   L'équation de la tangente Δ en x_0 est donnée par :

   $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

   Ici, nous avons $x_0 = 1$, $f(1) = \mathbf{e}^0 = 1$ et $f'(1) = -\mathbf{e}^0 = -1$.

   Nous obtenons : $y = 1 - 1(x - 1)$

   Une équation de Δ est donc : $y = -x + 2$

Exercices proposés :

Pour chaque fonction définie ci-dessous, déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 :

1) $f(x) = x^2 - x - 3$ $\quad x_0 = 2$

2) $g(x) = \ln x$ $\quad x_0 = 1$

3) $h(x) = x\,\mathbf{e}^{-x}$ $\quad x_0 = 1$

4) $k(x) = x\,\mathbf{e}^{-x}$ $\quad x_0 = 0$

5) $\ell(x) = (x-1)^3 + x$ $\quad x_0 = 1$

(Voir aussi l'exemple 2 de la fiche méthode : "positions relatives de deux courbe")

Exercice de prolongement :

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}^*$, par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

On note C_f sa représentation graphique.

1) Déterminer les coordonnées des éventuels points de C_f en lesquels la tangente à un coefficient directeur égal à $\dfrac{1}{2}$. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en chacun de ces points.

2) Déterminer les coordonnées des éventuels points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (tangente "horizontale"). Déterminer l'équation de la tangente à C_f en chacun de ces points.

Réponses des exercices proposés :

1) $y = 3x - 7$ $\quad$ 2) $y = x - 1$ $\quad$ 3) $y = \dfrac{1}{\mathbf{e}}$ (tangente "horizontale") $\quad$ 4) $y = x$

Réponses de l'exercice de prolongement :

1) $A(-\sqrt{2}\ ;\ -3\sqrt{2}/2)$ et $B(\sqrt{2}\ ;\ 3\sqrt{2}/2)$ $\qquad T_A :\ y = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{2}$ et $T_B : y = \dfrac{1}{2}x + \sqrt{2}$

2) $C(-1\ ;\ -2)$ et $D(1\ ;\ 2)$ $\qquad T_C :\ y = -2$ et $T_D : y = 2$