FICHE MÉTHODE : POSITIONS RELATIVES DE DEUX COURBES

Sont traités dans cette fiche les problèmes de positions relatives de deux courbes ou d'une courbe par rapport à une droite. (Une droite n'étant qu'une courbe particulière)

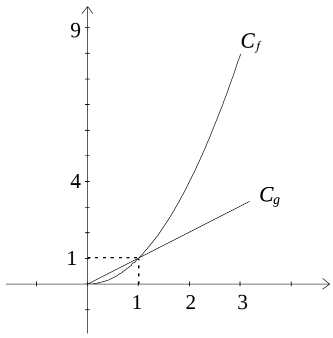
<u>Exemple 1</u> :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2$; $g(x) = x$.

On note C_f et C_g les courbes respectives de ces fonctions.

Étudier, sur $[0 ; +\infty[$, les positions relatives des courbes C_f et C_g.

<u>SOLUTION</u> :



Pour cela, on étudie **le signe** de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$$

Tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$	Calculs et justifications des signes
x	0	$+$		$+$		
$x - 1$		$-$	0	$+$		$x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$
$f(x) - g(x)$	0	$-$	0	$+$		

On a donc : $f \leqslant g$ sur $[0 ; 1]$ et $f \geqslant g$ sur $[1 ; +\infty[$.

Graphiquement : C_f est en dessous de C_g sur $[0 ; 1]$ et C_f est au dessus de C_g sur $[1 ; +\infty[$.

(Moralité : un nombre A n'est pas toujours inférieur à A^2... C'est vrai si $A \in [1 ; +\infty[$ mais faux si $A \in [0 ; 1]$)

<u>Exemple 2</u> :

Soient f la fonction définie par : $f(x) = (x - 1)^3 + x$.

On note C_f sa courbe représentative et T la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Étudier la position relative de C_f par rapport à T.

<u>SOLUTION</u> :

La fonction f est de la forme : $f = u^3 + v$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 1 \\ v(x) = x \end{cases}$

On a donc : $f' = 3u'u^2 + v'$

Ce qui donne : $f'(x) = 3(x - 1)^2 + 1$

L'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse x_0 est donnée par la formule :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Avec $x_0 = 1$, nous obtenons : $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$

On a : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$.

D'où une équation de T : $y = x$

La position relative de C_f par rapport à T est donnée par le **signe** de la différence $f(x) - x$:

$$f(x) - x = (x-1)^3 = (x-1)^2\,(x-1)$$

On a donc : $f(x) - x \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x - 1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant 1$

C'est-à-dire : $f(x) \geqslant x \Leftrightarrow\; x \geqslant 1$

Conclusion : la courbe C_f est au dessus de T sur $[1 \,;\, +\infty[$ et donc en dessous de T sur $[-\infty \,;\, 1]$.

Remarque : cet exemple illustre le cas où la courbe "traverse" sa tangente. On appelle ceci "un point d'inflexion".

Exercice supplémentaire : tracer, soigneusement, C_f et T de l'exemple ci-dessus.

Exercices proposés :

1) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \mathbf{e}^x - (x+1)$.

   Dresser le tableau de variation de φ. En déduire le signe de la fonction φ.

   En déduire que la courbe de la fonction exponentielle est située **au dessus** de la droite d'équation $y = x + 1$.

2) Soit f la fonction définie, sur $]2 \,;\, +\infty[$, par : $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+1) + x$.

   On note C_f sa courbe représentative.

   Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

   Étudier la position relative de C_f et Δ.

   (Voir aussi la fiche méthode : "comportements asymptotiques")

Question supplémentaire : justifier pourquoi la fonction f de l'exercice 2 ci-dessus est définie sur $]2 \,;\, +\infty[$.

Réponses et/ou indications pour les exercices proposés :

1) $\varphi'(x) = \mathbf{e}^x - 1$. Montrer que : $\varphi'(x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant 0$

   On obtient ensuite facilement le tableau de variation de φ.

   Pour obtenir le signe de φ, calculer $\varphi(0)$.

2) On trouve : $f(x) - x = \ln(x-2) - \ln(x+1)$.

   Or, on a : $x - 2 \leqslant x + 1$

   D'après la propriété : $A \leqslant B \Leftrightarrow \ln A \leqslant \ln B$ pour tous A et B de $]0 \,;\, +\infty[$, on obtient :

   Pour tout $x \in\,]2 \,;\, +\infty[$: $\ln(x-2) \leqslant \ln(x+1)$

   On en déduit, pour tout $x \in\,]2 \,;\, +\infty[$: $f(x) - x \leqslant 0$

   Donc : C_f est **en dessous** de Δ sur $]2 \,;\, +\infty[$