1 Rappel de cours

Cette propriété traduit la stricte croissance de la fonction exponentielle.

Propriété 1 Soient a et b deux réels. Alors :

$$e^a < e^b \iff a < b.$$

2 Méthode et exemples

Point méthode Pour résoudre une inéquation avec des exponentielles :
① on détermine le domaine de validité de l'inéquation ;
② on résout l'inéquation en s'appuyant sur la propriété 1 ;
③ on teste si les solutions trouvées sont dans le domaine de validité et on conclut.

Exemple. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^x \leqslant \frac{1}{e^x}$.

b) $3e^{2x} + e^x - 4 < 0$.

a) Soit D_v le domaine de validité de l'inéquation. On a :

$$x \in D_v \iff e^x \neq 0$$

L'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $D_v = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & e^x \leqslant \tfrac{1}{e^x} \\ \iff & e^x \leqslant e^{-x} \\ \iff & x \leqslant -x \\ \iff & 2x \leqslant 0 \\ \iff & x \leqslant 0 \end{aligned}$$

Comme $D_v = \mathbb{R}$, on en tire $\mathscr{S} =]-\infty ; 0]$.

b) Le domaine de validité de l'inéquation est $D_v = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

On pose $X = e^x$ pour se ramener à du second degré.

$$\begin{aligned} & 3e^{2x} + e^x - 4 < 0 \\ \iff & 3(e^x)^2 + e^x - 4 < 0 \\ \iff & 3X^2 + X - 4 < 0 \quad \text{et} \quad X = e^x \end{aligned}$$

Le trinôme $3X^2 + X - 4$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 49 > 0$.
Il admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-1-7}{6} = -\frac{4}{3} \qquad ; \qquad X_2 = \frac{-1+7}{6} = 1.$$

Il est du signe de $-a = -3 < 0$ à « l'intérieur des racines », c'est-à-dire sur $\left]-\frac{4}{3} ; 1\right[$.

Le système précédent est alors équivalent à :

$$\begin{aligned} & -\tfrac{4}{3} < e^x < 1 \\ \iff & e^x < 1 \quad \text{car} \quad e^x > 0 \\ \iff & x < 0 \end{aligned}$$

Comme $D_v = \mathbb{R}$, on en tire $\mathscr{S} =]-\infty ; 0[$.

3 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $e^{2x} < x$.

b) $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$.

c) $e^{x^2} \leqslant (e^x)^2$.

d) $e^{2x} + 3e^x - 4 > 0$.

e) $e^{2x} - (1+e)e^x + e \geqslant 0$.

f) $e^x + e^{-x} \geqslant 2$.